UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El papel del lenguaje en la posesión del concepto de número

Ruth Alejandra Torres Rubiano

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Humanas, Departamento de Filosofía

Bogotá, Colombia

2018

El papel del lenguaje en la posesión del concepto de número

Ruth Alejandra Torres Rubiano

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Filosofía

Director:

PhD Adrian Cussins

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Humanas, Departamento de Filosofía

Bogotá, Colombia

2018

Resumen

El número es una noción básica, central y característica no solo de la matemática sino del quehacer humano. Ante el resultado de distintos estudios que muestran habilidades cuantitativas en bebés con pocos meses de nacidos e incluso en animales, en contraste con estudios de comunidades indígenas que no poseen términos en su lenguaje para denotar números -lo que aparentemente muestra una carencia de conceptos numéricos-, se hace fundamental cuestionarse por la relación que pueda existir entre el lenguaje y la posesión del concepto de número. En este trabajo, después de aclarar lo que se entenderá por poseer el concepto de número, se busca defender que el lenguaje puede ejercer un papel sobre lo numérico. Con este fin, se sostendrá que el lenguaje funciona como una tecnología cognitiva que permite dar cuenta de la posesión del concepto de número y, en esta medida, resulta indispensable para nuestra comprensión de los procesos numéricos.

Abstract

The number is a basic, central and characteristic notion not only of mathematics but of human activity in general. Given the results of different studies showing quantitative abilities in babies a few months old and even in animals, in contrast to studies of indigenous communities that do not have terms in their language to denote numbers -which apparently shows a lack of numerical concepts-, it becomes fundamental to question the relationship that may exist between language and the possession of the concept of number. After clarifying what is meant by having the concept of number, this work seeks to understand that language can play a role on the numerical. For this purpose, it will be argued that language functions as a cognitive technology that allows to account for the possession of the concept of number and, to this extent, it is indispensable for our understanding of numerical processes.

Contenido

Introducción

El número es noción básica, central y característica no solo de la matemática sino del quehacer humano; lo numerable está presente en todo ámbito, probablemente mucho más allá de lo que se puede llegar a creer. El número se manifiesta en campos complejos del mundo como la ingeniería, la informática, las finanzas, la economía, la física, la química y hasta en ciencias humanas como las ciencias sociales y la psicología; pero sin duda, trasciende completamente estos campos y llega hasta las actividades más básicas y cotidianas del hombre de hoy. Por mencionar algunos ejemplos, utilizamos números para leer la hora, para decir la fecha, para entender las noticias del clima, para tomar un ascensor, para coger correctamente un bus, para identificar un vuelo, para poder cocinar sin que se queme o quede cruda la comida, para poder llegar a la dirección correcta de un lugar, para entender las calificaciones de un examen, para identificar cuánto se debe pagar por algo, para saber qué dinero se debe recibir de regreso después de pagar, para no ser estafado en un intercambio de bienes, para comprender la edad que se tiene, para entender los resultados electorales de un país, etc. ¿Qué sería de una persona que no pudiese comprender el concepto de número?

El número aparece como una forma continua de conexión al mundo de hoy. Pensar en una persona a la que se le dificulte seriamente comprender o que no posea el concepto de número es pensar en alguien aislado, por lo menos, del tipo de actividades mencionadas en los ejemplos anteriores. Situaciones así viven, por ejemplo, las personas adultas con condición de discalculia en la que se presentan dificultades precisamente para entender conceptos numéricos simples o para comprender de manera muy básica los números (DfES, 2001), estas personas tienen dificultades bastante significativas para desenvolverse normalmente, no es raro que precisen de acompañamiento continuo.

Adicionalmente, el número es una de las puertas principales de ingreso al conocimiento matemático, este es el objeto de estudio, precisamente, de una de las ramas más antiguas y fundamentales de la matemática, la aritmética (Courant & Robbins, 1996; De Cruz, Neth, & Schlimm, 2010). A partir de un primer acercamiento a una idea primitiva de número, empezamos a construir una idea cada vez más compleja que, por un lado, nos va permitiendo tener acceso a otro tipo de conocimientos aritméticos y matemáticos en general y por otro, nos permite nuevas interpretaciones e interacciones con el mundo. Esto es posible evidenciarlo en la propia historia de la matemática, donde en sus inicios, en Egipto y Mesopotamia, era usado exclusivamente para las necesidades del comercio (número para contar y medir), pero al transcurrir del tiempo, este concepto se fue desarrollando, ampliando y complejizando dándole paso a nuevos fines como predicción de eventos, optimización de recursos y espacios, modelamiento de fenómenos, entre otros.

Al respecto, Frege afirma:

> Las verdades de la aritmética gobiernan todo lo que es numerable. Este es el dominio más amplio de todos ya que pertenece no solo a lo real, no sólo a lo intuitivo, sino a todo lo pensable. ¿No deberían, entonces, las leyes de la aritmética estar conectadas íntimamente con las leyes del pensamiento? (Frege & J.L. Austin (trans.), 1884, p. 21)

Frege pone en evidencia la extensión y la importancia de lo numerable; lo que ocasiona un enfoque donde lo aritmético no concierne solamente a lo matemático. El número se convierte entonces en aspecto fundamental para la obtención de nuevos conocimientos matemáticos y para permitir cierto tipo de interacciones con el mundo. Ante este panorama, se vuelve crucial preguntarse por las condiciones de acceso a este concepto.

Algunas investigaciones en los campos de la psicología y las ciencias cognitivas han sugerido que los bebés cuentan con cierto tipo de habilidades numéricas; por ejemplo, un bebé entre tres y cuatro días de nacido se dice que puede discriminar colecciones de objetos de dos y tres ítems (Antell & Keating, 1983); a la misma edad pueden realizar la distinción con sonidos, identificando entre dos y tres elementos; a los cuatro meses y medio pueden notar que uno más uno es dos y dos menos uno es uno (Lakoff & Núñez, 2000). Este tipo de resultados lleva a pensar que el ser humano cuenta con una disposición hacia el contenido numérico; es decir, que aparentemente, desde el momento del nacimiento ya posee una habilidad cuantitativa primaria.

Sin embargo, este panorama se hace aún más interesante al contemplar el siguiente caso. Existe una comunidad indígena en Brasil con cerca de 300 personas, que habitan cerca del río Maici al noroccidente del país. Esta comunidad conocida como Pirahã ha sido de interés para múltiples investigadores por casi 40 años. Lo que ha llamado la atención es que el lenguaje de los Pirahã es bastante peculiar; dentro de sus particularidades se tiene que no poseen palabras para designar números de ningún tipo; ni para designar cardinales, ni ordinales, ni palabras de números que permitan contrastar nombres, pronombres o verbos, ni términos cuantificadores. Como consecuencia de esto, Daniel Everett, que ha sido el principal investigador de esta comunidad indígena, sugiere que los Pirahã no tienen concepto de conteo y tienen ausencia de números de cualquier clase (Everett, 2005; Gordon, 2004; Von Bredow, 2006).

La situación de los Pirahã pareciera divergir de los resultados que se han venido obteniendo desde las ciencias cognitivas sobre esa habilidad cuantitativa primaria que el ser humano tiene desde incluso sus primeros días de nacido. Sin embargo, vale la pena preguntarse si estas restricciones lingüísticas de los Pirahã van de la mano con restricciones en este tipo de habilidades que muestran los bebés. Más importante aún, ¿esas habilidades primarias son muestra ya de posesión del concepto de número?

En caso de que los Pirahã tuvieran también ese tipo de habilidades, ¿qué les puede impedir desarrollar el concepto de conteo y de número? Si, como plantea Lakoff y Núñez, la generación y desarrollo de ideas matemáticas a partir de las habilidades primarias se da, gracias a ciertos mecanismos cognitivos que son los mismos que se implementan en nuestro diario vivir, en nuestra experiencia con el mundo ¿por qué la interacción que ellos tienen con el mundo no les permite desarrollar los conceptos aritméticos básicos que otras personas sí consiguen? Por otro lado, si ellos carecen de palabras para designar los números y de la misma manera carecen de proposiciones en su lenguaje donde intervengan palabras de número, ¿implica esto que efectivamente ellos no pueden comprender el sentido de número, ni que podrán comprenderlo hasta tener la capacidad en su lenguaje de hacer referencia a los números? ¿Qué relación tiene entonces, si es que existe, el lenguaje y la capacidad de comprender el concepto de número? Sin duda, se empiezan a generar una cantidad significativa de cuestionamientos.

La relación entre el dominio lingüístico y las habilidades numéricas ha sido de especial interés a partir del siglo XIX, donde se empezaron a plantear distintos estudios neuropsicológicos que buscaban determinar las posibles relaciones entre los trastornos lingüísticos y las dificultades con los números. Las investigaciones han arrojado resultados que, hasta cierto punto, podrían considerarse contradictorios. Por un lado, hay un tipo de estudios que encontraron relaciones entre las dificultades con los números y los trastornos lingüísticos (Delazer & Girelli, 1999); no obstante, otro tipo de investigaciones ha determinado que las áreas del cerebro normalmente relacionadas con el lenguaje, no son las mismas que tienen afectadas los pacientes con dificultades numéricas severas (Brian Butterworth et al., 1999). La relación entre lenguaje y número aún hoy en día no se da como determinada, sigue apareciendo evidencia de lado y lado soportando, aparentemente, posiciones diferentes.

Sobre el papel que pudiera ejercer el lenguaje en la posesión del concepto de número pareciera haber dos posiciones; la primera, donde se considera que el lenguaje es completamente independiente de lo numérico y por lo tanto su papel no va más allá de servir como medio de exteriorización del conocimiento numérico, y la segunda, donde se plantea la posesión del concepto de número como dependiente del lenguaje; en particular, se verá más adelante, que en esta postura se considera que el lenguaje permite acceder a conceptos de cantidades exactas, lo que se planteará como fundamental para el desarrollo aritmético.

Determinar la posible relación que se plantea se hace interesante por distintos motivos. Por un lado, ofrecería un avance resaltable en la comprensión del aprendizaje de la matemática. Como se planteó, el número aparece como uno de los principales y primeros vínculos con el conocimiento matemático, por lo que su aprendizaje va a resultar fundamental en el posterior desarrollo de habilidades para este campo. Además, fácilmente se reconoce la cantidad y la gravedad de las dificultades que suelen presentarse en el entendimiento de la matemática; por lo que aceptar o descartar el lenguaje como aspecto constitutivo de la posesión del concepto de número, sin duda brindaría nuevas herramientas y nuevas pistas sobre cómo abordar la búsqueda de las posibles causas de las falencias que se presentan en el aprendizaje de la matemática.

Por otro lado, una respuesta a esta pregunta ofrecería un camino distinto de análisis del debate sobre la prioridad entre lenguaje y cognición, dando pistas de lo que sucede en un ámbito específico de la cognición, en la cognición numérica. Si el lenguaje resultara fundamental para poseer concepto de número, eso estaría mostrando, por lo menos en este caso, cierta prioridad del lenguaje sobre la cognición.

Adicionalmente, determinar el papel del lenguaje en la posesión del concepto de número, podría brindar una posible perspectiva de comprensión de distintos tipos de evidencia que se han publicado, relacionados con lo lingüístico y lo numérico. Por ejemplo, podría otorgar una posible explicación del tipo de habilidades cuantitativas que podrían poseer los animales (a los que, como se verá más adelante, se les han concedido varias de estas habilidades); también, podría ser útil en el planteamiento de una hipótesis de lo que sucede en casos como el de los Pirahã, de los que se dice que no tienen concepto de número; podría además, ser de ayuda en la comprensión de casos como la discalculia donde aparecen dificultades para entender conceptos numéricos simples, entre otra serie de casos y evidencias particulares que se han presentado respecto a este tema.

Bajo esta perspectiva, se considera fundamental iniciar la búsqueda por aclarar el tipo de papel que desempeña el lenguaje en la posesión del concepto de número. Para esto, en el primer capítulo se aclara lo qué se va a entender al afirmar que una persona posee el concepto de número, se propone una serie de condiciones que debería cumplir una persona que pueda dar cuenta, hasta cierto punto, de posesión de concepto de número, de tal manera que no se dé por sentado el rol que pueda desempeñar el lenguaje. Esta serie de condiciones es el resultado de una revisión de distintas posturas recientes relacionadas con el tema; por lo que se pretende, además, que esta serie de condiciones se planteen como una síntesis razonable de las posiciones contemporáneas.

En el segundo capítulo, se evalúa si el lenguaje puede realmente influir en la posesión del concepto de número. El lenguaje claramente tiene un propósito comunicativo, pero ¿puede desempeñar un papel en un propósito cognitivo diferente? Para este fin, se entenderá el lenguaje bajo la noción de tecnología cognitiva y posteriormente, se presentarán distintas evidencias que permiten postular al lenguaje como una tecnología cognitiva para la posesión del concepto de número.

Por último, en el tercer capítulo se inicia un recorrido para determinar el tipo de tecnología al que pertenece el lenguaje, lo que permite especificar el papel del lenguaje en la posesión del concepto de número. Para esto, se plantean tres categorías distintas de tecnología y se analiza si el lenguaje puede pertenecer a cada una de esas. Asimismo, en este capítulo, se revisan múltiples estudios empíricos que podrían servir de evidencia a favor de una u otra categoría.

1. Concepto de número

La importancia de lo numérico propone el cuestionamiento sobre cómo accedemos a este dominio, ¿cuáles son las bases fundamentales de lo numérico que permiten un posterior desarrollo aritmético habitual? Esta pregunta se plantea buscando discernir entre un cierto tipo de habilidades, que se nombrarán en este trabajo habilidades cuantitativas primarias, que no implican necesariamente un posterior desarrollo numérico, ni aritmético y entre otro tipo de habilidades o conocimientos que sí puedan ser fundamentales para la posesión del concepto de número.

Es sabido, que distintas especies animales (chimpancés, ratas, perros, palomas, entre otras) cuentan con ciertas habilidades cuantitativas primarias que generalmente consisten en una discriminación de cantidades; es decir, saber elegir entre dos grupos de objetos aquel que contenga una mayor cantidad, por dar un ejemplo; y en otros casos particulares, son habilidades un poco más específicas, como la habilidad de elegir de forma recurrente un grupo donde haya tres elementos (Carruthers, 2002; S. Dehaene, 1997; Gallistel & Gelman, 1992). Estas habilidades es posible reconocerlas también en los seres humanos, incluso cuando estos tienen apenas algunos meses de vida (S. Dehaene, 1997; Lakoff & Núñez, 2000). Sin embargo, no es difícil reconocer que la evolución del conocimiento matemático -o aritmético en este caso- es posible evidenciarla de una manera más clara, mucho más avanzada y más estructurada en los seres humanos[1] [2].

---

[1] Sin desconocer que hace falta una mayor comprensión del conocimiento aritmético en los animales y sobre todo de sus alcances. Dehaene en *How the mind creates mathematics* presenta casos de animales especiales que según él sobrepasan las habilidades aritméticas que se podrían esperar de ellos; por ejemplo, un caballo que se supone es capaz de hacer sumas de fracciones. Sin embargo, este trabajo no ha dejado de ser objeto de discusiones y críticas. Hasta no tener una

Entonces, ¿qué es aquello que nos permite ir más allá de estas habilidades cuantitativas primarias? Dentro de este panorama, el interés de la tesis se centra en el posible papel que puede desempeñar el lenguaje dentro de esas bases fundamentales de lo numérico; podría ser que el lenguaje se presente solamente como un medio de exteriorización del contenido numérico o, que pueda llegar a ser fundamental para la cognición numérica y debido a esto, sea una de las razones que le permite al ser humano ir más allá de las habilidades primarias.

Con este objetivo en mente, este primer capítulo pretende esclarecer qué se va a entender al afirmar que una persona posee el concepto de número. No es un esfuerzo por esclarecer la naturaleza del concepto de número; no se está tratando de dar una definición de número. Se está buscando una serie de condiciones que debería cumplir una persona que pueda dar cuenta, hasta cierto punto, de cognición numérica, de tal manera que no se dé por sentado el rol que pueda desempeñar el lenguaje. En ese sentido, no se quiere una especificación de condiciones necesarias y suficientes de la posesión del concepto de número[3], sino una aclaración preliminar que permita entender aproximada y provisionalmente a qué se hará referencia cuando se mencione que una persona posee concepto de número.

Este tipo de condiciones no está implicando una noción fuerte de *concepto*; concepto no puede ser entendido como constituyente de una proposición, que podría estar implicando capacidades determinadas como lingüísticas que permiten tener manejo de la proposición. Esta manera de entender concepto estaría implicando ya una respuesta positiva sobre el papel del lenguaje[4] y de nuevo, no se quiere presuponer el rol que pueda llegar o no a ejercer este sobre lo numérico. Concepto de número entonces se

---

herramienta fiable para estudiar el conocimiento aritmético en los animales, no es posible hacer aseveraciones sobre el alcance que este tiene, más allá de lo que ya se ha podido confirmar.

[2] Se hace referencia a los seres humanos con condiciones de vida que puedan considerarse dentro de lo habitual. Se sabe que hay casos de seres humanos aislados, como los llamados niños ferales o salvajes, que posiblemente no podrían evidenciar un conocimiento aritmético muy avanzado.

[3] Esta especificación ya supondría una respuesta sobre el papel del lenguaje. Para determinar si el lenguaje desempeña o no algún papel, bastaría con revisar si aparece dentro de las condiciones dadas.

[4] Es decir, que el lenguaje sí desempeña un papel en la posesión del concepto de número.

utiliza para hacer referencia a la unidad básica, a lo fundamental para llegar a lo numérico, a lo que permite ir más allá de las habilidades cuantitativas primarias. Otra forma de haber abordado este aspecto pudo haber sido hablar no de posesión de concepto de número, sino de capacidades numéricas. No obstante, esta salida tampoco carece de dificultades. A manera de ejemplo, a una máquina expendedora se le podrían conceder capacidades numéricas; pero, por un lado, implicaría de nuevo una respuesta inmediata sobre el papel del lenguaje, en este caso como negativa, y por el otro lado, hablar de capacidades numéricas no daría cuenta de qué es lo que permite superar las habilidades cuantitativas primarias que es lo que se está buscando.

Para llevar a cabo el objetivo del capítulo, se presentarán ciertas concepciones que existen en la literatura sobre los requisitos que deben satisfacerse para poseer concepto de número y se planteará la serie de condiciones que son del interés de este capítulo, buscando la síntesis más razonable que dé cuenta de esas posiciones y que cumpla con los requisitos que se han propuesto. En la presentación de las concepciones, se cuestionará sobre el tipo de caracterización que ofrecen los autores, si, por dar un ejemplo, sus condiciones dan cuenta de capacidades innatas, o si el enfoque se centra en la experiencia y en lo perceptual, o si las condiciones ofrecidas suponen o no una caracterización lingüística, esto último siendo de interés relevante para la tesis.

1.1 Enfoque de Brian Butterworth

Brian Butterworth es profesor emérito en el instituto de neurociencia cognitiva en la Universidad College London en Inglaterra. Butterworth enfoca su búsqueda hacia la posesión del concepto de número natural, en donde aparece como fundamental entender número natural como cardinal: “es crucial distinguir la posesión de un concepto de número natural como tal, es decir, el concepto de número cardinal, de los conceptos de los números cardinales particulares, tales como ser seis (sixness)” (Brian Butterworth & Reeve, 2008).

Si Butterworth está tomando número natural como cardinal, es entonces entendible que el concepto fundamental para la aritmética sea el concepto de numerosidad (término que el autor emplea desde la psicología para referirse a cardinalidad (B. Butterworth, 2010)). Así mismo, citando a Fuson y Kwon, Butterworth argumenta que para que las palabras numéricas sean utilizadas para sumar y restar, estas deben asumir significados cardinales (B. Butterworth, 2004). Un año más tarde, estaría afirmando: “El significado distintivo de las expresiones numéricas es denotar el número de cosas en un conjunto: la numerosidad de un conjunto” (B. Butterworth, 2005). Dentro de las expresiones numéricas, Butterworth comenta que se contemplan expresiones como: “las palabras de número: uno, dos, tres…; los numerales: 1, 2, 3…; los números romanos, los patrones en los dados, cartas y dominós”.

Avanzando con la propuesta de Butterworth, la numerosidad se caracteriza por ser abstracta por dos razones. La primera, que determina que la numerosidad no es la propiedad de un objeto en particular, sino la propiedad de un conjunto. Esto implica abstraer los objetos individuales, para poder tomarlos como una unidad, como un solo conjunto y dado que, la numerosidad se presenta como propiedad de un conjunto, este último será otro concepto que Butterworth considerará como fundamental. El conjunto aparece como el eslabón que permite justificar la importancia de la numerosidad (B. Butterworth, 2010). La segunda razón para considerar a la numerosidad abstracta se refiere a que los conjuntos pueden presentarse en distintas modalidades; sus elementos pueden ser objetos físicos, sonidos, objetos abstractos (como deseos, anhelos, creencias, etc.).

Pero ¿qué se requiere entonces para decir que se entiende el concepto de numerosidad? Butterworth, en varios de sus artículos, plantea una serie de condiciones que deben cumplirse para garantizar que un niño comprende el concepto de numerosidad. Haciendo una recopilación de estas condiciones, se encuentran:

1. **Entender el principio de correspondencia uno-a-uno**. Esta habilidad se desarrolla, según el autor, de manera independiente del aprendizaje de la secuencia de palabras para contar. El entendimiento se puede evidenciar en actividades como: “poder darle un dulce a cada persona, poner una taza con cada plato, poder nombrar a cada persona en una habitación o una imagen, o señalarlas, una vez y solo una vez” (B. Butterworth, 2005). Los niños de 2 años de edad son capaces de realizar estas actividades (Potter & Levy, 1968). De igual manera, Butterworth cita a Gelman y Meck, quienes determinaron que los niños a los 3 años y medio de edad son capaces de identificar cuándo un títere, que está contando objetos, se equivoca contando el mismo objeto dos veces u olvidándose de contar uno. En el 2010, Butterworth, refina un poco más este principio,

planteándolo como la capacidad de establecer la equivalencia o no equivalencia numérica de dos conjuntos por medio de la correspondencia uno-a-uno.

2. **Subitización.** Esta es una habilidad para reconocer numerosidades hasta 4, sin necesidad de hacer un conteo explícito (Brian Butterworth et al., 1999). Según varios autores los bebés de un promedio de 5 meses de nacidos, ya son capaces de subitizar (Lakoff & Núñez, 2000)[5].
3. **Entender que los conjuntos de cosas tienen numerosidad y que ciertas manipulaciones de conjuntos afectan la numerosidad.** Dentro de las manipulaciones aparece combinar conjuntos, eliminar subconjuntos y otras manipulaciones de ese estilo. Esta habilidad, según Butterworth, se traduce en ser capaz de calcular las consecuencias aritméticas de sumar y restar. Esto implica también, **entender cuándo un conjunto tiene la misma numerosidad que otro** (relacionada con la condición 1)**, o una numerosidad mayor o una más pequeña.** De esto se puede derivar también, que se deben reconocer las manipulaciones de los conjuntos que no afectan la numerosidad (B. Butterworth, 2005).
4. **Comprender que los conjuntos no deben ser de cosas visibles.** Los elementos de los conjuntos también pueden ser audibles, táctiles o abstractos (B. Butterworth, 2005).
5. **Contar.** El conteo se propone como una habilidad que requiere de varios procesos (B. Butterworth, 2005):
    - **a.** Aprender las palabras para contar, en el orden correcto.
    - **b.** Coordinar la producción de las palabras para contar con la identificación de objetos en el conjunto que será contado.
    - **c.** Comprender que cada objeto en el conjunto se cuenta una sola vez (condición 1).
    - **d.** Comprender que el conteo otorga la cantidad de objetos en el conjunto.
    - **e.** Ser capaz de tratar una colección de objetos como un conjunto. Es decir, como un solo objeto que puede tener propiedades, entre esas está la de

[5] Según Butterworth, el papel de la subitización entra después de aprender a contar y repetir continuamente el conteo, percatándose de que se obtiene como resultado el mismo de la subitización, así, se reforzará la idea de que cada palabra de número (uno, dos, tres…) representa una numerosidad única.

su numerosidad. Butterworth referencia un artículo de Feigenson del 2004 (*Infants chunk object arrays into sets of individuals*) y otro de Wynn del 2002 (*Enumeration of collective entities by 5-month-old infants*) como evidencia de que los bebés son capaces de tratar colecciones de objetos como una sola unidad.

Contar es para Butterworth el primer puente entre la capacidad innata del niño para la numerosidad y los posteriores logros matemáticos más avanzados de la cultura en la que nació.

Lo anterior resume y recopila la propuesta de las condiciones necesarias de Butterworth para comprender la numerosidad, que es el concepto de número que ofrece este autor. Así mismo, el avance en la comprensión de este concepto, de sus implicaciones y de la habilidad en su manipulación, estará directamente relacionado con el desarrollo del conocimiento aritmético (B. Butterworth, 2005).

1.1.1 Comentarios

El enfoque de Brian Butterworth se centra en los conceptos de numerosidad y conjunto. Lo primero que hay que notar es que hay cierta ambigüedad en estos términos. Si Butterworth habla de numerosidad y no de cardinalidad, recalcando que usa el primero para referirse al segundo, se podría esperar que esté haciendo referencia a un tipo de propiedad perceptual, en lugar de formal; sin embargo, esto no es claro cuando define numerosidad como: “número de objetos en un conjunto” (B. Butterworth, 2010, p. 534), definición que no plantea una diferenciación clara con la cardinalidad y que dirige el problema hacia el concepto de conjunto, que es un concepto formal.

Leyendo a Butterworth, puede pensarse que el uso que le suele dar a la palabra *conjunto* no es para determinar el objeto matemático “conjunto” sino para referirse a una agrupación de objetos que pueden tomarse como un todo y que tiene una propiedad, su numerosidad (B. Butterworth, 2010, p. 538) y, que vendría siendo también la contraparte perceptual del concepto formal del conjunto. No obstante, cuando Butterworth menciona cosas como: “[…] las representaciones [de números] deben poder ser introducidas en operaciones basadas en conjuntos” (B. Butterworth, 2010, p. 535), o “formalmente, la aritmética es interpretable en términos de manipulaciones en conjuntos y gran parte del aprendizaje temprano se basa en la manipulación física de conjuntos de objetos” (B.

Butterworth, 2010, p. 535) o "como el resultado de sumar dos numerosidades equivale a contar la unión de dos conjuntos disjuntos con esas numerosidades, los niños pueden aprender a sumar uniendo dos conjuntos y contando los miembros de su unión" (B. Butterworth, 2005, p. 8) no parece querer establecer distancia entre un conjunto formal y un "conjunto" perceptual, por llamarlo de alguna manera; da la impresión de que cuando Butterworth usa el término de conjunto lo hace pensando que es aplicable tanto a lo formal, como a los objetos físicos.

Sin embargo, los elementos formales y los objetos físicos no tienen por qué cumplir con las mismas propiedades porque los elementos formales implican cosas que no están relacionadas con lo perceptual; de la misma manera, un conjunto formal y un "conjunto" perceptual no deberían ser comparables. Por citar un ejemplo conflictivo, ¿cómo podría plantearse en términos de "conjuntos" de objetos físicos el conjunto vacío?, ¿debería entenderse como conjunto?, ¿qué diferencia habría entre ese conjunto (el vacío) y el conjunto cuyo único elemento es vacío, y entre ese último y el conjunto cuyo único elemento es un conjunto cuyo único elemento es vacío? Si Butterworth propone la numerosidad como una propiedad perceptual, no debería ser propiedad de un objeto que no sea perceptual. Utilizar el término conjunto, como lo hace Butterworth, se hace innecesario y problemático para entender el tipo de enfoque que busca proponer el autor.

Por otro lado, tiene sentido, en una búsqueda por lo fundamental, hablar de número natural. Por lo general, el aprendizaje habitual de lo numérico inicia a través de los números naturales, además, se pueden entender los otros sistemas numéricos a partir de estos y, por último, históricamente fueron los primeros en aparecer. Los números naturales se encuentran en la base del dominio numérico y si se busca las condiciones fundamentales de la posesión del concepto de número, es coherente preguntarse por los números naturales.

Adicionalmente, el hecho de que el concepto fundamental para entender lo numérico sea la cardinalidad tiene sentido con una visión conjuntista de los números naturales, que es totalmente posible[6] y, si se pueden plantear todos los números naturales y definir sus

[6] El sistema axiomático de los números naturales puede plantearse en términos conjuntistas de la siguiente manera; cero se define como el representante de los conjuntos que no tienen ningún

propiedades en términos conjuntistas, se puede aceptar la cardinalidad, como concepto fundamental de la aritmética. Sin embargo, no pareciera que este sea el objetivo de Butterworth, un camino como el que se está planteando implicaría que, antes de comprender número, se debería comprender conjunto y cardinalidad como un objeto matemático y una propiedad de ese objeto matemático, respectivamente. Es decir, se debería conocer lo fundamental de la teoría de conjuntos, antes de tener una aproximación a lo numérico. Por supuesto, este camino, aunque no parezca usual, es posible; pero, de nuevo, no parece ser lo que busca Butterworth.

Parece entonces que lo fundamental de esta propuesta son las cantidades, no la numerosidad de un conjunto (que no tiene sentido), ni la cardinalidad de un conjunto, y, por lo tanto, no la cantidad de elementos de un conjunto, sino la cantidad de objetos de una agrupación. Esto va de la mano con la importancia que Butterworth le da al proceso de contar, que, como ya se había mencionado, lo ve como el primer puente entre la capacidad innata del niño para subitizar y los posteriores logros matemáticos más avanzados de la cultura en la que nació. Por lo tanto, lo principal en esta visión es el conteo, esta habilidad es la que se propone acá como la que permite superar las habilidades cuantitativas primarias.

---

elemento $0 = \emptyset$ y los otros números naturales pueden construirse a partir del sucesor; el sucesor de un conjunto x será el conjunto: $S(x) = x \cup \{x\}$. Por lo que:

$1 = S(0) = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$

$3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\}$

$\vdots$

Cero es un número natural, el sucesor de cualquier número natural es también otro número natural, si dos números tienen el mismo sucesor, entonces estos números son iguales entre sí; por la construcción anterior, estos axiomas pueden plantearse en términos conjuntistas. Haría falta definir un conjunto inductivo y agregar el axioma de infinitud que garantiza su existencia, para terminar de capturar los axiomas de Peano (sistema axiomático que permite construir y caracterizar los números naturales y es uno de los más utilizados en matemáticas). Un conjunto I es inductivo si cumple con: $0 \in I$ y si $n \in I$, entonces $S(n) \in I$. Además, la existencia de un conjunto inductivo se asegura por el axioma de infinitud. Con esto, a grandes rasgos, ya se tiene el sistema axiomático de los números naturales en términos conjuntistas (Hrbacek & Jech, 1999).

Por razones similares a las anteriores, la refinación de la condición de entender correspondencias 1-a-1 que Butterworth hace en el 2010, parece desviarse de su objetivo inicial. En un comienzo está pensando en un tipo de actividades que podrían llevar a cabo niños de dos años, como: “poder darle un dulce a cada persona, poner una taza con cada plato, poder nombrar a cada persona en una habitación o una imagen, o señalarlas, una vez y solo una vez” (B. Butterworth, 2005). En el 2010, la plantea como la capacidad de establecer la equivalencia o no equivalencia numérica de dos conjuntos por medio de la correspondencia uno-a-uno, esto último ya deja de parecer realizable por niños de 2 años.

Por otro lado, se hace importante recalcar que la capacidad innata de la subitización no parece estar desempeñando un papel fundamental en la posesión del concepto de número. Al revisar el trabajo de Butterworth, se encuentra que la subitización ayuda a reforzar la idea de que cada palabra de número (uno, dos, tres…) representa una numerosidad única. Este reforzamiento se da en el momento que se empieza a repetir una y otra vez el proceso de conteo y el sujeto se percata de que siempre se obtiene el mismo resultado que aquel que ofrece la subitización. Por lo tanto, esta capacidad en este enfoque ayuda a fortalecer ideas ya adquiridas, pero no se hacer necesario para la adquisición de estas.

Por último, respecto al lenguaje, este no es mencionado explícitamente como capacidad fundamental para la comprensión de lo numérico; pero, al revisar las condiciones que Butterworth plantea, es posible reconocer que se necesita del lenguaje para el proceso de conteo; no obstante, aparentemente su papel no va más allá que el de otorgar las palabras para contar. Adicionalmente, Butterworth menciona que los niños parecen responder a las propiedades numéricas de su mundo visual, sin el beneficio del lenguaje (B. Butterworth, 2005, p. 5), haciendo referencia precisamente al tipo de habilidades que se catalogaron al inicio de este capítulo como habilidades cuantitativas primarias y que se encuentran no solamente en bebés, como lo sustenta Butterworth, sino también en algunos animales. Luego, que no sea necesario el lenguaje para este tipo de habilidades, no permite determinar sus implicaciones para el tipo de habilidades en el que hay interés en esta tesis.

Adicional a lo anterior, Butterworth afirma que la simbolización de las numerosidades se vuelve importante tanto en las habilidades aritméticas individuales, como colectivas, ya que resultará útil para pensar sobre los números y comunicar sobre ellos. Así, una baja competencia lingüística podría llegar a afectar las habilidades y el conocimiento aritmético (B. Butterworth, 2010, p. 539). Entonces, Butterworth reconoce que no hay un papel del lenguaje en las habilidades cuantitativas primarias, pero afirma que sí puede llegar a afectar el desempeño aritmético.

1.2 Enfoque de Gelman y Gallistel

Rochel Gelman y Charles Gallistel son ambos profesores eméritos distinguidos del departamento de psicología de la Universidad de Rutgers en los Estados Unidos. Para estudiar la visión que tienen ellos sobre este tema, se revisarán dos de sus artículos que se consideran significativos. El primero es *The child's understanding of number* del año 1978 donde proponen dos tipos de principios como necesarios para el concepto de número y que pueden tener los niños en una edad preescolar. El segundo es del año 1992, se titula *Preverbal and verbal counting* y en este realizan una búsqueda por la fuente de una de esas series de principios.

La primera serie de principios presentada en 1978 permite abstraer el número de la realidad. El número aparece entonces como una entidad abstracta que, hasta cierto punto, representa realidades concretas del mundo físico. Este puede representar la numerosidad, que es una propiedad de un conjunto (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. vii). Estos principios son nombrados: "los principios de conteo". Por otra parte, el segundo tipo de principios permite razonar acerca de los números, diseñados para aplicarse a aquellas representaciones de numerosidad que se obtienen por los principios de conteo. Estos dos tipos de principios interactúan de manera constante para llegar al concepto de número que tienen los niños. A continuación se presentan las dos series de principios (R. Gelman & Gallistel, 1978).

Principios de conteo

1. **El principio de uno-a-uno.** Identificar los elementos de una matriz con marcas distintivas, de tal manera que a cada elemento se le asocie una y solamente una marca. Para este principio, Gelman y Gallistel proponen que se debe coordinar dos procesos: partición y etiquetado. En el proceso de partición, deben presentarse dos categorías: los elementos que ya fueron contados y los que faltan por contarse, esta se va actualizando paso a paso, cada vez que se va

contando un elemento. Por otro lado, para el proceso de etiquetado se debe tener un conjunto de distintas etiquetas que deben ser utilizadas una a la vez. Estas etiquetas, en los adultos, suelen ser las palabras de conteo, pero en los niños que hasta ahora están dominando el procedimiento de conteo, no es obvio que deba ser así, no se exige que sean incluso etiquetas verbales. Lo que se exige es que ninguna etiqueta debe usarse más de una vez, a cada una de estas debe asignársele solamente un elemento de la matriz y todos estos elementos deben tener una etiqueta asignada. Los procesos de partición y etiquetado deben ser coordinados; esto es, deben empezar, continuar y terminar al mismo tiempo (R. Gelman & Gallistel, 1978, pp. 77-78) .

2. **El principio de orden estable.** Las etiquetas asignadas a cada elemento de un arreglo no pueden ser aleatorias, deben aparecer siempre en un mismo orden (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 79).
3. **El principio cardinal.** La última etiqueta utilizada para contar los elementos de un conjunto representa una propiedad del conjunto visto como un todo, esta es, su cardinalidad. Se debe estar en la capacidad de anunciar la última etiqueta de conteo utilizada e indicar que esta representa la cardinalidad del conjunto. Este principio, que presupone los dos anteriores, debería desarrollarse después de estos (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 80)

Los anteriores principios describen el funcionamiento del proceso de conteo. Los dos siguientes no son parte activa de la concepción de número del niño; pero, enfatizan dos requisitos ampliamente presupuestados en la definición de conteo del niño pequeño: ellos no restringen sus conteos a solamente elementos perceptuales, y no usan solo procedimientos de conteo para los que pudieron haber sido reforzados (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. vii)

4. **El principio de abstracción.** Los tres anteriores principios pueden ser aplicados a cualquier tipo de conjunto. Puede ser de entidades físicas o no físicas (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 80).
5. **El principio de irrelevancia del orden.** Los elementos de un conjunto no deben contarse en un orden específico. Se puede empezar a contar por cualquier de los elementos, manteniendo los principios anteriores. Quien maneje este principio debe saber según los autores, así no sea de manera consciente, lo siguiente: Un

elemento contado es una cosa, no es un "uno" o un "dos"; las etiquetas se asignan temporal y arbitrariamente a los elementos; y, sin importar cómo se cuente, el cardinal del conjunto siempre será el mismo (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 82).

Principios de razonamiento numérico

Los principios de conteo son usados para abstraer la numerosidad de un conjunto de objetos, los principios de razonamiento establecen cómo los niños piensan sobre esta propiedad una vez la han abstraído; es decir operan sobre representaciones de numerosidades (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 160). Estos principios se subdividen en tres clases: relaciones, operaciones y reversibilidad.

1. **Relaciones.**
    a. **Equivalencia.** Entre dos numerosidades se puede o no establecer una relación de equivalencia. Para determinarla de manera práctica, se deben contar los elementos de los conjuntos, si las representaciones de sus numerosidades son iguales entre sí, entonces se dirá que los conjuntos satisfacen la relación de equivalencia. Esto implica que los niños son capaces de determinar cuándo dos numerosidades son iguales y, de acuerdo con los autores, pueden discernir entre las transformaciones de los conjuntos que modifican su numerosidad y aquellas que no lo hacen (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 164).
    b. **Orden.** Si dos numerosidades no son equivalentes, entonces debe haber una relación de orden estricto entre las dos; es decir, una debe ser mayor que la otra (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 164).
    c. **Transitividad de las relaciones.** La equivalencia es transitiva. Esto es: Si la numerosidad A es equivalente a la numerosidad B y la numerosidad B es equivalente a la numerosidad C, entonces la numerosidad A es equivalente a la numerosidad C. Sin embargo, los juicios sobre las numerosidades que hacen los niños son transitivos cuando estas son menores o iguales a 5, según Gelman y Gallistel (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 166).

2. **Operaciones**

   Los operadores son principios que especifican las consecuencias de las manipulaciones de los objetos de un conjunto. Habrá ciertas manipulaciones que afecten la numerosidad del conjunto y otras que no.

   a. **Identidad.** Son las transformaciones que no alteran la numerosidad de un conjunto. Los niños pequeños son capaces de reconocer una gran cantidad de transformaciones de este tipo de acuerdo con Gelman y Gallistel (alargar, acortar, girar una matriz lineal o cambiar el color) (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 169).
   b. **Adición.** Esta es una operación relacionada con las transformaciones de los conjuntos que alteran la numerosidad de este. Los niños parecen comprender que, si se experimenta un incremento en la numerosidad del conjunto, algo debió ser adicionado. Por otro lado, los niños usan el conteo para evaluar las consecuencias de la adición (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 169).
   c. **Sustracción.** Esta operación, al igual que la adición está relacionada con las transformaciones que afectan la numerosidad. Los niños parecen comprender que, si se experimenta un decremento en la numerosidad del conjunto, algo debió ser sustraído (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 172).
3. **Reversibilidad.** Este principio permite reconocer que la adición deshace el efecto de la sustracción. Es decir, si en un conjunto de objetos han sido retirados dos de esos elementos, el principio de reversibilidad propone que se identifica que lo que se debe hacer para volver a tener la misma numerosidad inicial es agregar dos objetos. Los autores mencionan que los niños suelen identificar correctamente si se debe agregar o eliminar objetos para obtener la misma cantidad que se tenía en un momento inicial, a pesar de que no identifiquen exactamente la cantidad que debe ser agregada o eliminada (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 175).

De esta manera, los principios de conteo y los principios de razonamiento numérico permiten ir construyendo el concepto de número. En esta visión, número aparece como representante de la numerosidad, como una abstracción de una propiedad de agrupaciones de objetos y se adquiere por medio de los principios de conteo; posteriormente, los principios de razonamiento numérico explican una serie de habilidades y conocimientos que tienen los niños sobre aquellos representantes de las numerosidades. Por lo tanto, en Gelman y Gallistel el proceso de conteo aparece como fundamental para la posesión de lo numérico, tal como sucedió posteriormente con Butterworth.

Sin embargo, si el conteo es lo fundamental, ¿qué se requiere para poder contar? En el artículo de 1992, los autores realizan una búsqueda por la fuente de la adquisición del conteo. Para esto se postula un mecanismo de conteo preverbal que el ser humano comparte con los animales. Este mecanismo fue propuesto por Meck y Church en el año 1983 (Meck & Church, 1983).

El mecanismo de conteo preverbal está compuesto por una fuente para un flujo de impulsos, un generador de impulsos que cierra el flujo de impulsos siempre que un evento o un objeto es contado, un acumulador que suma los impulsos y un mecanismo de lectura que arroja la magnitud en el acumulador a la memoria, cuando ya el último evento u objeto ha sido contado. Los estados del acumulador son llamados numerones[7], estos tienen un orden estable y se les hace corresponder los elementos del conjunto a ser enumerado. El generador de impulsos creará un solo impulso que llegará al acumulador por cada elemento que haya; es decir, esta correspondencia es 1-a-1. El estado final del acumulador, es decir el último numerón utilizado, será el representante de la numerosidad del conjunto contado (Gallistel & Gelman, 1992, p. 51). Este mecanismo cumple con los mismos principios de conteo propuestos en el año 1978.

Este mecanismo de conteo preverbal proporciona los principios requeridos para el desarrollo del conteo verbal. Según los autores, cuando se aprende a contar se aprende un mapeo bidireccional entre las magnitudes preverbales que representan la numerosidad (numerones) y las palabras o símbolos de número. Este mapeo se postula como necesario para cualquier competencia numérica verbal.

Por otro lado, la subitización, que es entendida en este caso como una estimación no verbal rápida de la numerosidad, en términos de este enfoque es el mecanismo de

[7] Los numerones (numerons) son las representaciones mentales de la numerosidad (Gallistel & Gelman, 1992, p. 44). En 1978, los autores emplearon este término para referirse a la categoría general de las posibles etiquetas de conteo, que no debían ser necesariamente verbales, en contraposición de los numerlogs que sería un subconjunto de los numerones y que corresponderían con las palabras usuales para contar (R. Gelman & Gallistel, 1978, p. 77).

conteo preverbal en adición del mapeo anterior que les asigna a las magnitudes resultantes del mecanismo, las palabras de número para las numerosidades pequeñas que están dentro del rango de la subitización.

Adicionalmente, se propone que los hechos numéricos sobre operaciones de suma y multiplicación de números de un solo dígito dependen también de este mapeo, esta vez de las palabras o símbolos de número a los numerones. Además, este modelo explica las diferencias de tiempo de reacción y los patrones de error revelados por los experimentos sobre aritmética mental. Los niños que no han sido escolarizados aún, tardan más y tienen más posibilidad de error en juzgar cuál de dos números es más grande si estos son más cercanos entre sí. Esto, sugieren los autores, parece indicar que los niños entran a la escuela ya con una capacidad de saber directamente la representación posicional de un número al escuchar su nombre, sin necesidad de contar, lo que indica, según Gelman y Gallistel que los niños en edad preescolar ya aprendieron el mapeo de los dígitos a los numerones aunque para ellos este mapeo sea más lento y no tan preciso como para niños o adultos que ya hayan practicado más (Gallistel & Gelman, 1992, p. 66).

En resumen, el concepto de número y la capacidad para razonar verbalmente sobre número se van construyendo por dos tipos de principios específicos, los principios de conteo y los principios de razonamiento numérico (R. Gelman & Gallistel, 1978). Sin embargo, estos principios son posibles gracias al sistema preverbal de conteo que funciona como marco de referencia para comprender y asimilar el razonamiento numérico verbal (Gallistel & Gelman, 1992, p. 65). Este sistema preverbal está presente tanto en los animales, como en los humanos.

1.2.1 Comentarios

En la visión de Gelman y Gallistel vemos de nuevo la centralidad de la numerosidad, término que fue usado primero por ellos antes de que lo empleara Butterworth. Numerosidad acá, como en Butterworth, se refiere a una propiedad de un conjunto. De nuevo, surge la dificultad encontrada en Butterworth de no marcar una distinción clara entre los conceptos formales y los perceptuales. Se habla de cardinalidad, aparentemente en el mismo sentido en el que se habla de numerosidad, y se habla de conjunto de la misma manera en la que se habla de colección o arreglo de objetos. No se volverá a proponer la discusión sobre este tema de nuevo, pero se hacía preciso recalcar esta situación.

Lo numérico es acá el resultado de la abstracción de la numerosidad, de una propiedad de colecciones de objetos vistas como un todo y, la manera en la que se da la abstracción es a través del conteo. El conteo se propone nuevamente como el proceso que permite superar las habilidades primarias; sin embargo, a diferencia de Butterworth, Gelman y Gallistel plantean un mecanismo que es aún más fundamental que el conteo y que, de hecho, permite que este último se dé. Este mecanismo es independiente del lenguaje y permite contar de una manera no verbal. Según los autores, este mecanismo está presente también en los animales, por lo que cabe cuestionarse, si el conteo es fundamental para la posesión del concepto de número y los animales poseen la base para el conteo, esto es, poseen el mecanismo de conteo preverbal, ¿por qué los animales no presentan el mismo desarrollo de la concepción numérica que presentan las personas? Si este mecanismo llega a ser importante para comprender el razonamiento numérico verbal, no puede ser suficiente para este.

Por otro lado, cabe anotar que, los principios para razonar sobre número buscan ser aplicados a las representaciones de numerosidad. El conteo se trata como un algoritmo que genera las representaciones de numerosidad y son estas las empleadas en el razonamiento. Sin embargo, los principios parecieran ser explícitamente sobre la numerosidad, más no sobre sus representaciones. Al revisar el planteamiento de los principios se encuentra que todos hacen referencia a la numerosidad e incluso a las manipulaciones de los elementos de los conjuntos o de los conjuntos mismos (como es el caso de los principios de las operaciones). Solo en el caso del principio de la relación de equivalencia, se hace una mención expresa de la representación de numerosidad, pero aparece esta como un medio de verificación del principio. El principio de equivalencia busca determinar cuándo dos numerosidades son equivalentes, para esto se debe verificar que las representaciones de la numerosidad sean iguales. Por la manera en la que se presenta este principio, pareciera que saber determinar que las representaciones son o no iguales ya se da por sentado y lo que pretende determinar este principio es cuándo se presenta una determinada relación entre las numerosidades. Puede que los autores consideren que estos principios estén basados en otros principios más básicos sobre las representaciones de numerosidades; pero, estos que se presentan en el artículo son sobre habilidades que puede desarrollar el niño sobre la comprensión de las numerosidades.

Adicionalmente, es de resaltar que en los principios planteados por estos autores no entra en juego la subitización (como se vio, esta es posible entenderla también por medio del mecanismo de conteo preverbal), Gelman y Gallistel apoyan la hipótesis planteada por Helmut Beckmann en el año 1924 de que un niño primero cuenta un determinado tamaño de conjunto y solo más adelante en su desarrollo subitiza el mismo tamaño de conjunto. Es decir, la subitización para estos autores no puede ser un proceso independiente del conteo, como se plantea generalmente; se puede explicar la rapidez de reacción con numerosidades pequeñas con el desarrollo de estrategias especializadas de conteo rápido para números pequeños. Ellos argumentan que no es claro cómo un proceso que no requiere contabilización puede brindar las herramientas apropiadas para el posterior proceso de razonamiento y, además, este proceso no permite dar cuenta de las habilidades cuantitativas de los niños pequeños.

Uno de los principales argumentos para definir la subitización como un mecanismo de aprehensión perceptual directa es que la pendiente de la función del tiempo de reacción para números menores a cuatro es 0. Es decir, toma el mismo tiempo determinar cuándo hay 1,2,3 o 4 elementos. Sin embargo, Gelman y Gallistel citan el trabajo de Chi y Klahr del año 1975 donde demuestran que esta pendiente no es así, hay una relación directa entre el tiempo de reacción y la cantidad de elementos incluso para cantidades menores a 5: “Los adultos requieren, en promedio, aproximadamente 46 milisegundos más para hacer una estimación precisa del número dos más que el número uno, unos 46 milisegundos más para estimar el número tres que el número dos, y unos 100 milisegundos más para estimar el número cuatro que el número tres. En los niños que están en jardín infantil (5 años de edad) estos incrementos son mucho más grandes” (R. Gelman & Gallistel, 1978, pp. 68-72).

Respecto a lo anterior, la subitización, que ha sido una habilidad hallada en bebés y animales (Lakoff & Núñez, 2000) sí es posible entenderla de manera independiente del conteo; de hecho, podría ser posible aceptarla sin la noción de cantidad, entendiendo la subitización como una capacidad de reconocimiento de los patrones visuales que pueden formarse entre uno hasta tres o cuatro objetos. En los experimentos para determinar si esta habilidad está presente, habitúan a los bebés o a los animales a, según se dice, una cantidad determinada de objetos, y cuando se les presenta una cantidad distinta, se encuentran factores que determinan sorpresa en ellos. Esto puede explicarse de manera más simple (porque no requiere noción de cantidad) si se entiende que la habituación se está haciendo respecto al patrón visual, lo que implica que, si el patrón cambia, es de esperarse que se genere sorpresa. Esto iría en concordancia también con los tiempos de reacción determinados para distintas cantidades de objetos, entre más objetos, es de esperarse que el patrón visual aumente en complejidad y, por lo tanto, deba aumentar el tiempo de reacción.

1.3 Enfoque de Lakoff y Núñez

El tercer enfoque que se presenta es el de George Lakoff un investigador norteamericano de lingüística cognitiva, profesor de Lingüística en la Universidad de California en los Estados Unidos y Rafael Núñez quien es profesor de ciencias cognitivas en la misma universidad; su obra *Where mathematics comes from* del año 2000 buscó fundar una ciencia cognitiva de la matemática.

La perspectiva de la aritmética presentada por Lakoff y Núñez es una perspectiva corporizada (embodied arithmetic) que hace referencia a la aritmética siendo conformada por medio de la estructura de nuestros cerebros, nuestros cuerpos y nuestras interacciones cotidianas en el mundo. Así, la teoría de los números naturales se presentará como desarrollada a partir de unas ciertas habilidades innatas sobre conceptos aritméticos básicos y extendida por medio de una capacidad de formar metáforas que relacionan directamente la experiencia sensorio-motora con el conocimiento matemático (Lakoff & Núñez, 2000).

Se considera entonces que el ser humano cuenta por lo menos con dos habilidades aritméticas innatas, una es la capacidad de subitizar (subitizing), que es entendida como el reconocer instantáneamente cantidades pequeñas de objetos, y la otra es una capacidad de hacer las formas más simples de adición y sustracción también de números[8] pequeños (1+1, 2-1, 2+1, 2-1). Adicional a esto, se plantea una habilidad, que es compartida con ciertos animales, y es la habilidad para la numerosidad. En este caso,

[8] Lakoff y Núñez entienden número como número *cardinal*, que lo explican como la cantidad de objetos que hay en una colección (Lakoff & Núñez, 2000, p. 51).

numerosidad ya no coincide exactamente con la cardinalidad, como en los enfoques anteriores; aquí, numerosidad se entiende como: "[…] estimaciones aproximadas consistentes del número de objetos de un grupo". (Lakoff & Núñez, 2000, p. 51) De lo anterior, al ser la numerosidad una estimación, esta puede fallar. Podría tal vez, entenderse la numerosidad como una extensión no exacta de la subitización, como una capacidad de estimar cantidades sin realizar un conteo.

Para Lakoff y Núñez, así como para los autores ya tratados, el conteo juega un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Este es uno de los factores que permite avanzar de las habilidades innatas y extenderlas a conocimientos más avanzados. Para contar, el ser humano requiere de ciertas capacidades cognitivas. Los autores plantean el conteo con los dedos como ejemplo para plantear las capacidades:

1. **Capacidad de agrupamiento.** Distinguir lo que se está contando, poder agrupar elementos discretos ya sea visual, táctil o mentalmente.
2. **Capacidad de ordenamiento.** Tener la habilidad de establecer un orden en los objetos que van a ser contados ya que generalmente los objetos no están puestos en ningún orden en particular.
3. **Capacidad de emparejamiento.** Poder emparejar dedos individuales con objetos individuales siguiendo la secuencia de objetos en orden[9].
4. **Capacidad de memoria.** Esta capacidad permite llevar un seguimiento de qué objetos han sido contados y qué dedos han sido utilizados para contar.
5. **Capacidad de detección de agotamiento.** Poder identificar el momento en el que ya no hay más objetos para ser contados.
6. **Asignación del número cardinal.** Ser capaz de asignar el último número del conteo como el número cardinal del grupo contado. Teniendo presente que este último número es un número ordinal (por ser un número que denota una posición en una secuencia ordenada), pero en el momento de asignarlo como el tamaño del grupo, pierde esta propiedad de ordinal.
7. **Capacidad de independencia del orden.** El cardinal del grupo de objetos que se cuenta es siempre el mismo sin importar el orden en el que se realice el conteo.

[9] No se especifica, pero se esperaría que este emparejamiento haga corresponder solamente un objeto a cada dedo y que no quede ningún objeto sin ser emparejado. Esta capacidad coincidiría con los principios 1-a-1 propuestos por Butterworth y Gelman y Gallistel.

Esta capacidad corresponde al principio de irrelevancia del orden propuesto por Gelman y Gallistel.

Las capacidades anteriores se plantean para el conteo dentro del rango de la subitización; esto es, entre 1 y 4, en este caso la asignación del número cardinal se da a través de la subitización, en el ejemplo presentado sería a través de la subitización de los dedos. Para poder contar más allá de cuatro objetos se plantean como necesarias las siguientes dos capacidades adicionales (Lakoff & Núñez, 2000, p. 52).

8. **Capacidad de agrupamiento combinatorio.** Poder reunir grupos imaginados o percibidos para formar grupos más grandes. Esta capacidad podría verse entonces como una extensión o generalización de la primera capacidad.
9. **Capacidad de simbolizar.** Asociar símbolos físicos (o palabras) con números (que son entidades conceptuales).

Continuando con esta propuesta, las habilidades innatas y las capacidades para el conteo no son suficientes para la aritmética elemental de los números naturales. Para lograr esto, Lakoff y Núñez proponen dos capacidades cognitivas mucho más complejas (Lakoff & Núñez, 2000, pp. 52-53):

1. **Capacidad de metaforizar.** Conceptualizar los números cardinales y las operaciones aritméticas en términos de experiencias propias de distintos tipos. Entre estas los autores mencionan: “experiencias con grupos de objetos, con la estructura parte-todo de los objetos, con distancias, con movimiento y ubicación, entre otros”. Las metáforas se pueden ver como aplicaciones que van desde el dominio de la experiencia al dominio de la aritmética. Dentro de las metáforas conceptuales los autores proponen dos tipos:
   a. **Metáforas fundamentales.** Permiten proyectar experiencias cotidianas a conceptos abstractos. Ejemplo: quitar objetos de un grupo proyectado al concepto de sustracción. Estás metáforas están relacionadas con el fundamento de la matemática.
   b. **Metáforas de enlace.** Permiten conectar la aritmética a otras ramas de la matemática. Ejemplo: Entender los números naturales a través de conjuntos. Estás metáforas están relacionadas con la estructura de la matemática.

2. **Capacidad de hacer mezclas conceptuales.** Establecer correspondencias a través de dominios conceptuales y unir distintas metáforas conceptuales para formar metáforas complejas. El ejemplo presentado por los autores es la combinación de subitización y conteo.

Asimismo, Lakoff y Núñez presentan cuatro metáforas fundamentales, estas son:

1. **La aritmética como una colección de objetos.** En esta metáfora el dominio de origen son las colecciones de objetos, el dominio objetivo es la aritmética. Esta metáfora se presenta como la más básica de todas. Las asignaciones definidas por esta metáfora son las siguientes:

   Colecciones de objetos de igual tamaño → Números
   Tamaños de las colecciones → Tamaños de los números
   Tamaños más grandes/pequeños de colecciones → Números mayores/menores
   La colección más pequeña → La unidad
   Reunir colecciones → Adición
   Tomar una colección de otra más grande → Sustracción

   Esta metáfora está relacionada con los enfoques tanto de Butterworth como de Gelman y Gallistel, donde los números representan cantidades de objetos donde se cumplen cada una de las correspondencias definidas por esta metáfora.

2. **La aritmética como una construcción de objetos.** Dominio de origen: construcción de objetos. Dominio de destino: Aritmética. En esta metáfora se conceptualizan los números como totalidades compuestas por partes, que son a su vez números. Esta metáfora está muy relacionada con la primera; construir objetos implica recolectar y unir sus partes. Asignaciones de la metáfora:

   Objetos (compuestos en partes finales del tamaño de la unidad) → Números
   El objeto completo más pequeño → La unidad (uno)
   Tamaños de los objetos → Tamaños de los números
   Tamaños más grandes/pequeños de colecciones →Números mayores/menores
   Actos de construir objetos →Operaciones aritméticas

Un objeto construido → El resultado de una operación aritmética
Un objeto completo → Un número entero
Reunir objetos con otros para formar objetos más grandes → Adición
Tomar objetos de objetos más grandes, para construir otros objetos → Sustracción

3. **La metáfora de la vara para medir.** Dominio de origen: Uso de una vara para medir. Dominio de destino: Aritmética. Asignaciones de la metáfora:

   Segmentos físicos (compuestos en partes finales del tamaño de la unidad) → Números
   El segmento físico básico → Uno
   Longitudes de los segmentos físicos → Tamaños de los números
   Longitudes más largas/cortas de segmentos físicos → Números mayores/menores
   Actos de colocación de segmentos físicos → Operaciones aritméticas
   Un segmento físico → El resultado de una operación aritmética
   Juntar segmentos físicos uniendo sus extremos para formar segmentos físicos más largos → Adición
   Tomar segmentos físicos de otros más grandes, para construir otros segmentos físicos → Sustracción

4. **La aritmética como movimiento a través de un camino.** Dominio de origen: Movimiento a través de un camino. Dominio de destino: Aritmética. Esta metáfora está relacionada con la anterior, el movimiento en una línea recta genera un segmento físico, pero esta permite obtener el cero. Asignaciones de la metáfora:

   Actos moverse a lo largo del camino → Operaciones aritméticas
   Un punto de ubicación en el camino → El resultado de una operación aritmética
   El origen, el inicio del camino → Cero
   Puntos de ubicaciones en el camino → Números
   La ubicación unitaria, un punto de ubicación distinto del origen → Uno
   Más lejos/cerca del origen que → Mayor que/menor que
   Moverse de un punto de ubicación A retirado del origen, una distancia equivalente a la distancia de origen a un punto de ubicación B → Adición de B a

Moverse hacia el origen de A, una distancia equivalente a la distancia de origen a un punto de ubicación B → Sustracción de B a

1.3.1 Comentarios

El enfoque de Lakoff y Núñez presenta la posesión del concepto de número y el desarrollo de las habilidades aritméticas como basados en tres aspectos fundamentales: las habilidades innatas, el conteo (que ha sido factor común en las posiciones presentadas) y la capacidad de formar metáforas que relacionan directamente la experiencia sensoriomotora con el conocimiento matemático.

Dentro de las habilidades innatas, aparece la subitización y una capacidad para sumas y restas simples de números pequeños. Adicionalmente, se presenta una tercera habilidad de hacer estimaciones aproximadas consistentes del número de objetos de un grupo, esta se reconoce como una habilidad para la “numerosidad”. No obstante, tanto la capacidad para las sumas y restas, como la de la numerosidad no parecen ser fundamentales; dado que, entre las condiciones que se presentan posteriormente, estas no desempeñan ningún papel evidente. Por otro lado, la subitización se plantea como necesaria para el proceso de conteo entre 1 y 4 objetos.

Lakoff y Núñez mencionan que las primeras 7 capacidades permiten resultados estables dentro del rango que da la subitización (entre 1 y 4 objetos), ya que la asignación del número cardinal se da a través de la subitización de los dedos usados para contar. Sin embargo, en el reconocimiento inmediato de la cantidad, que implica la subitización, se da por supuesto que no se realiza un conteo explícito, por lo que no es claro el motivo por el cual se hacen necesarias estas 7 capacidades de conteo, si el número cardinal se obtiene por el proceso de subitización. Ni mucho menos, por qué se haría uso de los dedos, si se podrían subitizar directamente los objetos.

Los autores presentan las capacidades 8 y 9 como aquellas que permiten contar para una cantidad de objetos mayor a 4. La capacidad 8, de agrupamiento combinatorio, se podría ver como precursora para comprender la operación suma en términos de unión de colecciones. No obstante, para realizar un conteo de objetos, no es clara la necesidad de esta capacidad; si se van a contar los elementos de dos agrupaciones, en principio, lo que se tiene son objetos discretos separados de cierta manera (que permiten formar las agrupaciones); pero, al ser objetos discretos, la capacidad de agrupamiento ofrecida en el punto 1 debería garantizar poder tomar todos aquellos objetos, separados o no en grupos, como un solo grupo. Por otro lado, aun cuando fuese necesaria esta capacidad de agrupamiento combinatorio, no sería claro por qué esta no es necesaria para una cantidad de objetos menor o igual a 4. ¿Por qué dos agrupaciones de dos objetos cada una, no requiere de esta capacidad para poderlas ver como un solo grupo; pero, sí se requiere en el caso de que se tengan dos agrupaciones de 2 y 3 objetos respectivamente?

Por otra parte, ¿por qué la capacidad de simbolizar no es necesaria para las cantidades menores que 4? Si al contar, se hacen emparejamientos entre dedos y objetos, ¿en qué momento aparece el número?, ¿a qué hace referencia la expresión “el último número del conteo” (utilizada en la capacidad de asignación de número cardinal) en un emparejamiento de dedos y objetos donde no hay un símbolo que represente lo numérico?

Los anteriores cuestionamientos hacen que sea difusa la necesidad de separar las capacidades como lo plantean los autores y la dependencia de contar sobre la subitización. No es claro que esta habilidad innata deba desempeñar un rol en el proceso de conteo.

En cuanto a las metáforas, las metáforas 2, 3 y 4 (la aritmética como una construcción de objetos, la metáfora de la vara para medir y la aritmética como movimiento a través de un camino) ofrecen caminos distintos de llegar a los números, que no habían sido comentados por los autores anteriores. A pesar de esto, la primera metáfora se reconoce como la más básica de todas, debido a la correlación entre el conteo y la subitización con el agrupamiento de objetos y a que esta correlación se presenta de manera constante desde la niñez según los autores. Pero ¿qué implica este hecho frente a las otras metáforas?, ¿podría ser que estas metáforas puedan depender de alguna manera de la primera, o estas se pueden desarrollar de manera independiente?

En el texto se menciona la relación explícita que existe entre las primeras dos metáforas; sin embargo, pareciera que las últimas dos ya difieren completamente con la primera. Por el tipo de experiencia que supone cada metáfora, se podría suponer que estas se pueden desarrollar de manera independiente; sin excluir la posibilidad de que el haber adquirido una de estas metáforas pueda ayudar a la obtención de otra metáfora que esté relacionada.

Por otro lado, la mayor parte de las metáforas permite llegar a los mismos conceptos aritméticos, ¿son entonces necesarias las cuatro metáforas? Se podría argumentar que las metáforas están ofreciendo los distintos caminos posibles para llegar al concepto de número, lo que haría que solo una de estas (y cualquiera de las cuatro) fuera necesaria para adelantar el camino de la obtención del concepto.

Pero, se hace relevante el hecho de que solo la metáfora del movimiento a lo largo del camino ofrezca una correspondencia para obtener el concepto de cero, esto postularía esta metáfora como necesaria para la obtención de este concepto en particular. No obstante, esta concepción del cero como el origen de un camino, deja claramente de lado el entendimiento de este concepto como una ausencia que es, probablemente, más usual que la misma concepción presentada en la metáfora. Esta ausencia puede entenderse desde las metáforas de la colección de objetos o de construcción de objetos, como una carencia de objetos o de partes de estos (para el segundo caso) y desde la metáfora de la vara de medir como la carencia de segmento físico.

Una posibilidad de por qué esto no fue planteado de la manera que se está proponiendo es el hecho de que pensar las metáforas como aplicaciones, implica asignar a un elemento de un dominio, un elemento de otro dominio, por lo que no tendría sentido hacer una asignación a una ausencia de elementos. Sin embargo, no se puede desconocer que la experiencia de la ausencia desarrolla un papel importante (como originador o facilitador) en el entendimiento del cero.

Las razones anteriores procuran justificar que las cuatro metáforas no son todas necesarias para llegar al concepto de número, debido a que cualquiera de ellas podría, en principio, llegar a los mismos conceptos aritméticos. Sin embargo, ¿realmente cualquiera de estas metáforas podría permitir obtener los conceptos numéricos?, de una manera más clara: ¿la capacidad de metaforizar implica que al tener el tipo de experiencias que plantea cada metáfora, se pueda garantizar la obtención del concepto de número? Pareciera que es posible esperar una respuesta afirmativa de parte de los autores, pues finalmente ellos están postulando estas capacidades como aquellas que permiten ir desde un conocimiento aritmético innato a una extensión de este, que contiene el desarrollo del concepto de número y de las operaciones aritméticas, no obstante, estas capacidades no se categorizan explícitamente como suficientes en el texto.

La existencia de comunidades con pobres desarrollos aritméticos podría hacer inclinar la balanza hacia una respuesta negativa de esta cuestión. Un ejemplo es el grupo indígena del Brasil Pirahã que según el investigador Daniel Everett no posee conceptos numéricos (Everett, 2005); sin embargo, ellos tienen procesos de negociación y trueque donde cambian ciertas cantidades y tipos de bienes por otros, lo que evidencia una experiencia de colecciones de objetos. Podría plantearse situaciones que lleven al tipo de experiencias que se enuncian en las otras metáforas (no es tan claro que esto sea posible en la metáfora de la vara para medir), pero el solo hecho de que tengan experiencia de colecciones de objetos hace cuestionarse por qué no llegan al concepto de número. En este panorama, dos explicaciones son posibles; la primera, que la capacidad de metaforizar no sea común para todos los seres humanos, y la segunda es que no es suficiente el poder metaforizar para poder llegar al concepto de número. Cualquiera de las dos es desfavorable para este planteamiento.

Por lo anterior, ni las habilidades innatas, ni la capacidad para metaforizar parecen ser factores concluyentes sobre la posesión del concepto de número.

Por otro lado, en este enfoque se reconoce que hay un poco más de cuidado en la utilización de términos formales, ya no aparece el término conjunto, sino que en lugar de este es usado: grupo o colección de objetos, que parece más adecuado. No obstante, se emplea innecesariamente el término de cardinal, aunque se explica que este es usado para especificar la cantidad de objetos de una colección.

Un último aspecto por recalcar de este enfoque corresponde a la importancia de lo lingüístico. De nuevo, el papel del lenguaje se limita a otorgar las palabras o los símbolos para contar; en este caso, incluso su papel está restringido dentro del conteo, pues se considera necesario solo para las cantidades mayores que cuatro objetos. Sin embargo, según lo comentado no es claro el porqué de esta división.

1.4 Enfoque de Buijsman

Stefan Buijsman, doctor en filosofía de la matemática y reconocido actualmente por ser la persona con un PhD. más joven de Suecia (obteniendo este grado a sus 20 años) presenta el artículo *Learning the natural numbers as a child* del 2017, donde pretende caracterizar las etapas de adquisición de número dando una explicación fundada en información empírica. En la conclusión de su artículo, Bujisman recoge una serie de pasos que resumen las etapas por las que pasan los niños para adquirir el concepto de número natural (Buijsman, 2017, p. 17). Las etapas son las siguientes:

1. Los niños aprenden el segmento inicial (del 1 al 10 o usualmente un poco menos) de la lista de conteo, sin saber la interpretación cardinal de ninguna de esas palabras; pero, sabiéndolas en orden y siendo capaces de enumerar un conjunto de objetos (Buijsman, 2017, p. 4).
2. Los niños aprenden a distinguir conjuntos con un solo elemento de todos los demás conjuntos.
3. De acuerdo con la capacidad de distinguir conjuntos con un solo elemento, los niños asignan un valor cardinal único a *uno*.
4. Los niños, de forma lineal, asignan valores cardinales únicos a dos, tres y cuatro. Lo hacen sobre la base de la idea de que dos es uno y uno, tres es dos y uno, etc.
5. Los niños aprenden que el último número que se produce al contar es la respuesta correcta a la pregunta "¿cuántos?". Continúan aprendiendo el resto de los números en su lista de recuento (hasta aproximadamente diez) de la misma manera, pero también comienzan a vincular los números a su capacidad para estimar los tamaños establecidos sin contar.
6. Los números más grandes (aunque no está claro dónde comienza exactamente, si hay un punto de corte común) probablemente se aprenden sobre la base de la estructura del sistema numérico.

Buijsman menciona que no es claro qué es exactamente lo que les permite a los niños distinguir entre colecciones con un objeto y colecciones con más de un objeto, pero sugiere que puede estar ligado al aprendizaje del significado de *uno*. Una de las razones para plantear esto es que los niños que aprenden un idioma que haga explícita la distinción entre singular y plural, como el inglés, aprenden más rápido el significado de *uno* que los niños que aprenden un lenguaje donde esa distinción no sea explícita, como el japonés. Además, resulta que los niños empiezan a hacer la distinción lingüística entre singular y plural en la misma edad en la que son capaces de distinguir entre colecciones con uno o con más objetos. Buijsman sugiere como presumible que esa distinción lingüística la empiecen a hacer basándose en la habilidad de distinción entre colecciones (Buijsman, 2017, p. 6).

Por otro lado, aprender los números naturales parece ser un proceso más rápido entre más grande sea el vocabulario de un niño (sin importar que no esté relacionado con lo numérico), luego podría ser que el vocabulario también ayude al proceso de distinción entre colecciones de uno o más objetos. (Buijsman, 2017, pp. 6-7).

1.4.1 Comentarios

Este enfoque presenta el proceso de adquisición del concepto de número por medio de diferentes etapas de aprendizaje encontradas. En este caso, el planteamiento es un poco más explicativo que los anteriores sobre la manera en que se aprenden los valores cardinales.

En los otros enfoques, a grandes rasgos, el proceso se da de la siguiente manera: se aprenden las palabras de conteo, se reconoce una correspondencia 1-a-1 entre estas palabras y los elementos a ser contados y finalmente se entiende que la última palabra usada corresponde a la cantidad de objetos de la colección contada. No obstante, no es claro cómo comprender que la lista de palabras está otorgando una propiedad de las colecciones de los objetos que están contando, se presupone esta capacidad, pero no se explica cómo se logra.

En la explicación de Buijsman, los niños también aprenden que la última palabra de conteo corresponde con la cantidad total, pero antes de esto, han aprendido a reconocer colecciones con un solo objeto, le han asignado un valor cardinal único al *uno*, han comprendido los valores cardinales de uno, dos, tres y cuatro y, además, ya conocen y han usado para enumerar varias de las palabras para contar. Después de esto, son capaces de comprender que la última palabra utilizada para contar corresponde con el valor cardinal de la colección contada. En este caso, la unidad juega un papel importante y fundamental en la comprensión de las cantidades. El papel de la unidad no fue explícito en los casos anteriores, salvo por las metáforas de Lakoff y Núñez; sin embargo, las demás posiciones no cierran la posibilidad a que algo de este estilo pueda suceder; al no ofrecer una explicación de cómo se comprende que las palabras para contar otorgan cantidades[10], la propuesta de Buijsman no es necesariamente disjunta con la de los demás.

En esta visión, el conteo se encuentra de nuevo como fundamental para poseer el concepto de número natural (por lo menos para los primeros 10 números naturales) y dentro de este, se ve que la unidad juega un papel primordial para comprender la cantidad, que, a su vez, es aspecto básico para el conteo. Además de esto, hay otro factor importante que reconoce el autor y que no había sido planteado antes: para suponer un aprendizaje completo de lo fundamental de los números naturales, se hace necesario conocer que los naturales son infinitos (Buijsman, 2017, p. 18). Buijsman no explica cómo podría llegarse a un entendimiento de este tipo, pero sí reconoce que es un aspecto que no puede desconocerse en esta búsqueda por lo fundamental.

Es de recalcar que en este enfoque no se plantea como condición explícita la habilidad de emparejamiento o de hacer correspondencias 1-a-1, pareciera que la correspondencia entre números y objetos puede irse desarrollando paulatinamente, a medida que se va aprendiendo el significado cardinal de cada uno de los números. No obstante, se puede presuponer el uso de una habilidad de emparejamiento cuando se enuncia en el primer punto, que los niños usan palabras para contar para enumerar objetos. Adicionalmente, el autor afirma que los niños son capaces de reconocer si dos conjuntos (se supone que debe estar haciendo referencia a colecciones de objetos) están en correspondencia 1-a-1, pero si no han aprendido la interpretación cardinal de las palabras, no usan esta habilidad para hacer inferencias sobre la cantidad (Buijsman, 2017, p. 16).

---

[10] Posiblemente una excepción a esta situación es Gelman y Gallistel, quienes suponen que se nace con un mecanismo de conteo preverbal. Es posible entender que a una palabra le corresponde una cantidad, porque en el mecanismo ya se sabe que a las magnitudes que representan la numerosidad le corresponden ciertas etiquetas (numerones), luego solo hace falta comprender que esas palabras de número funcionan también como etiquetas.

Por otro lado, a pesar de que Buijsman reconoce cierto tipo de habilidades cuantitativas innatas, admite que este tipo de habilidades, que permiten entre otras cosas estimar tamaños de colecciones sin contar, es insuficiente por sí solo como base para el conocimiento de los números naturales y muestra de eso es que los animales posean esas mismas habilidades (Buijsman, 2017, p. 12). Buijsman propone que en la etapa 5 además de aprender que la última palabra del conteo corresponde a la cantidad de objetos de una colección, los niños comienzan a vincular los números a su capacidad para estimar los tamaños establecidos sin contar; sin embargo, no es claro que esto sea necesario para la comprensión del concepto de número; es decir, pareciera que las 6 etapas pueden desarrollarse aún si esta capacidad no está presente.

El lenguaje aquí además de ser necesario para las palabras para contar se sugiere como particularmente importante para aprender los números naturales. Parece que ciertas particularidades lingüísticas (como la posibilidad de hacer una distinción explícita entre el singular y el plural, y la cantidad de vocabulario que pueda tener un niño) puede acelerar o ralentizar el aprendizaje de lo numérico. Además, podría ser que aprender el significado de *uno* como palabra que representa un número, que a su vez está representando una cantidad única de objetos, ayude a que los niños puedan distinguir las colecciones de un objeto de las de más de un objeto.

1.5 Enfoque de Feigenson, Dehaene y Spelke

Lisa Feigenson trabaja en el departamento de psicología y ciencias del cerebro de la Universidad Johns Hopkins de los Estados Unidos, Stanislas Dehaene es profesor de la universidad francesa Collège de France y director de la unidad de neuroimagen cognitiva del Instituto Nacional de la Salud y de la investigación médica del mismo país, y por último, Elizabeth Spelke es psicóloga cognitiva del departamento de psicología de la universidad de Harvard y directora del laboratorio de estudios del desarrollo.

En el trabajo que publicaron en el año 2004, titulado *Core systems of number* los autores presentan dos sistemas centrales especializados para la representación de número. En este caso parece que número está entendiéndose también en términos de cantidades. Estos sistemas se encuentran tanto en los seres humanos, desde bebés, como en otras especies animales, por lo que los autores argumentan que no son producto de un aprendizaje individual, ni de la transmisión cultural (Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004, p. 307).

Es importante mencionar que a pesar de que en el artículo se plantea que el concepto de número natural está arraigado a estos dos sistemas, llegar a este concepto no depende solo de estos. Pues los procesos que implican su construcción los postulan como posiblemente relacionados con la educación en cierto tipo de culturas. Estos dos sistemas dan cuenta entonces de un sentido numérico básico, de nuestras intuiciones numéricas básicas que sirven como base para los conceptos numéricos más sofisticados y exclusivos de los seres humanos. (Feigenson et al., 2004, p. 307).

El primer sistema central es un sistema encargado de la representación aproximada de grandes magnitudes numéricas. Este sistema está presente tanto en bebés y niños como en adultos. El primer sistema permite dar una representación no exacta de número, permite capturar las diferencias entre numerosidades por medio de sus proporciones[11]. Además, permite realizar estas cuantificaciones en distintas modalidades (visuales, auditivas). Por último, se plantea una posibilidad de camino que conecta ese sentido numérico básico con probablemente el inicio del conteo y del desarrollo aritmético. Este primer sistema central se integra con el sistema numérico simbólico que le asigna un símbolo a cada número y permite la numeración exacta y la aritmética. Se sugiere que los niños aprenden a asignar los números simbólicos a las representaciones que tenían anteriormente de las magnitudes numéricas (Feigenson et al., 2004, pp. 307-310).

El segundo sistema central está encargado de la representación precisa de pequeños números de objetos individuales. Este sistema también se puede encontrar en bebés, niños y adultos. Este es el encargado de determinar las cantidades de una pequeña cantidad de objetos. Para el primer sistema central, se veía que la capacidad de diferenciar cantidades estaba relacionada con la proporción que había entre ellas; en este caso, la proporción ya no es importante, el factor decisivo es la cantidad absoluta de objetos. Los bebés tienen un límite superior de 3 objetos y para los adultos su rendimiento es casi perfecto entre 1 y 4 objetos; después de este límite, la tasa de error o

[11] Por ejemplo, los bebés de 6 meses pueden discriminar cifras con una proporción de 1: 2 pero no de 2: 3; es decir, pueden distinguir entre numerosidades como 8 vs. 16, pero no entre 8 vs. 12. Los bebés de 10 meses ya logran la discriminación en esa última proporción. Los adultos pueden reconocer proporciones tan pequeñas como 7:8 (Feigenson, Dehaene, & Spelke, 2004, p. 307).

el tiempo de respuesta aumentan de manera directamente relacionada con la numerosidad. Estos hechos han llevado a pensar que los números pequeños se procesan de manera diferente.

Por otro lado, es mencionado que en el segundo sistema central entra en juego ciertas propiedades continuas que no desempeñan ningún rol en el primer sistema. Entre esas está la extensión continua total de las agrupaciones de los objetos. Como ejemplo, se comenta una situación donde se le presentan a los bebés una galleta grande y dos galletas que suman la mitad del área de la primera, como resultado se obtiene que los bebés optan por la galleta grande, prefiriendo la extensión continua total sobre la cantidad de galletas.

1.5.1 Comentarios

El primer aspecto que se debe resaltar es que aquí no se están ofreciendo sistemas que permitan ir más allá de las habilidades cuantitativas primarias; por el contrario, los dos sistemas centrales permiten dar cuenta de aquellas habilidades. Los autores mencionan que dan cuenta de nuestras intuiciones numéricas básicas que sirven como base para conceptos numéricos más sofisticados y exclusivos de los seres humanos. Sin embargo, si estos sistemas centrales se encuentran tanto en personas como en animales, entonces estos no permitirán explicar cómo se desarrollan esos conceptos numéricos exclusivos de los seres humanos.

A pesar de que no es claro el camino, los autores plantean el primer sistema central como posiblemente integrado con el sistema numérico simbólico exacto, sugiriendo que los niños aprenden a asignar los números simbólicos a las representaciones que tenían anteriormente de las magnitudes numéricas. Sin embargo, no es claro cómo a la representación no exacta que concede el primer sistema central se le puede asignar símbolos que representan números exactos; si los niños le hacen corresponder a estos símbolos representaciones aproximadas, no se explica que de estos puedan derivar una numeración exacta y posteriormente un desarrollo aritmético a partir de ahí. Esta propuesta que conecta el sentido numérico con el avance en el concepto de número no parece ser satisfactoria.

1.6 Enfoque de Rips, Bloomfiel y Asmuth

Lance Rips y Jennifer Asmuth son profesores del departamento de Psicología de la universidad de Northwestern en los Estados Unidos y Amber Bloomfield de la universidad DePaul en el mismo país.

En el artículo *From numerical concepts to concepts of number* del 2008, los autores sugieren que las habilidades cuantitativas tempranas de las que hablan autores como Butterworth están más relacionadas con los conceptos de objeto que con conceptos matemáticos, rechazan que a partir de estas habilidades de objetos puedan llegar a conceptos matemáticos por medio de una inducción empírica. En la revisión que realizan los autores no se encontró una forma de inducción plausible de la enumeración de objetos al conocimiento completo de los números naturales. Por lo tanto, el concepto de número no puede depender del conteo o enumeración de objetos según esta visión (Rips, Bloomfield, & Asmuth, 2008, p. 637).

El enfoque que se propone en el artículo sus autores lo categorizan como un enfoque de arriba hacia abajo (top-down); donde ya no se da por supuesto que los números naturales nacen a partir del conocimiento de los objetos físicos, sino que se supone que los niños forman un esquema para los números que especifica su estructura ya como una secuencia infinita contable. El niño con el esquema inicia entonces ya con generalizaciones sobre número, no sobre operaciones con objetos físicos.

Se plantean entonces como necesarios para la formación del esquema las siguientes suposiciones (Rips et al., 2008, p. 638):

1. Los niños tienen una comprensión innata de los conceptos que les permiten expresar las nociones de unicidad y de correspondencia.
2. Con la comprensión de esos conceptos, los niños pueden formular la idea de una función 1-a-1.
3. Estas representaciones deben contener variables para individuos y predicados, ya que es en este sentido que las representaciones son esquemáticas según los autores.
4. Los niños tienen habilidades de procesamiento innatas para combinar y aplicar estas representaciones.

a. Una de esas habilidades debe ser la de la recursión que es importante en la comprensión del número natural por su relación con la función sucesor.

Ahora, los niños deben incluir cierta información en su esquema para poder afirmar que poseen el concepto de número natural. Esta información corresponde con los axiomas de Dedekind-Peano la cual debe ser adquirida como generalizaciones sobre números. Sin embargo, no es necesario que los niños sean conscientes de cada una de estas ideas, sino más bien que haya por lo menos una comprensión tácita de estas. A continuación, se enuncian las ideas como son presentadas en el artículo:

1. Hay un único número inicial.
2. Cada número tiene un sucesor único.
3. Cada número (excepto el primero) tiene un predecesor único.
4. Solo el número inicial y sus sucesores pueden ser números naturales.

1.6.1 Comentarios

Este último enfoque es completamente opuesto al común de los enfoques anteriores, en este, se rechaza la idea de que el concepto de número pueda depender del conteo, proceso que se supone fundamental en las otras posiciones para poder superar las habilidades cuantitativas primarias. Dentro de las razones que presentan los autores para determinar que el concepto de número no puede depender del conteo, está el hecho de que las representaciones de las magnitudes de los objetos no son los números naturales, esto es, no cumplen con todas las propiedades que cumplen los números naturales, por lo que estos conceptos cuantitativos que poseen los niños deben experimentar un cambio conceptual para que sean realmente representaciones de números verdaderos.

Pero ¿por qué razón hay que suponer que los niños tienen que iniciar con el concepto de número natural completo de una vez? Está la posibilidad de que puedan ir construyéndolo a medida que van aprendiendo sus propiedades, el conteo permite adquirir las representaciones de las cantidades de objetos, estas representaciones pueden ir refinándose y llenándose de propiedades a medida que los niños vayan familiarizándose con más y más números. Así como Rips y sus colegas afirman, los niños adquieren gradualmente la información que necesitan para entender el significado de los números (Rips et al., 2008, p. 638).

Por otro lado, este artículo menciona que este tipo de conceptos numéricos son sobre objetos y no realmente sobre números; no obstante, lo que se ha propuesto en las posiciones presentadas es que el número empieza a nacer como una abstracción de los objetos, a saber, como una propiedad de colecciones de objetos y a medida que las personas se van familiarizando con sus propiedades van comprendiéndolo más como un objeto abstracto dejando (no del todo) de lado su relación con los objetos. Los números pueden comprenderse como propiedades de colecciones de objetos y no por ese motivo dejan de ser números. De hecho, históricamente el número nació de esa manera, como una herramienta para contar y medir, es decir, directamente relacionado con la experiencia con objetos físicos (Campos, 2006; Courant & Robbins, 1996) y no fue sino con el transcurso del tiempo que empezó a estudiarse como entidad abstracta.

Otra de las críticas que señalan los autores es el problema que genera el plantear un principio como el siguiente: "Para cualquier palabra de recuento "n", la siguiente palabra de recuento "$s\,(n)$" en la secuencia de recuento se refiere a la cardinalidad $(n + 1)$ obtenida al agregar un elemento a las colecciones cuya cardinalidad se denota por "n"" (Rips et al., 2008, p. 631). Esto está ligado con las condiciones planteadas en las visiones revisadas que proponen que se debe ser capaz de determinar que la última palabra de conteo corresponde con la cantidad de elementos en la colección. El problema que proponen Rips y sus colegas es que este principio implica que las personas aprendan simultáneamente conteo avanzado (saber que el siguiente número después de n es $n + 1$) y la correlación que tiene este con la cardinalidad. Por lo tanto, el principio no puede especificar el significado de los números naturales ya que está presuponiendo el conocimiento de la estructura que debe crear.

A favor de los autores, es claro que sería bastante difícil que el proceso mencionado se presente de manera simultánea; pero, eso no implica que ese principio no se pueda dar. Los niños deben aprender primero las palabras de conteo, antes de poder asignarles su significado en términos de cantidades (Buijsman, 2017; B. Butterworth, 2005; R. Gelman & Gallistel, 1978). No es posible que puedan reportar que en un conjunto hay cuatro elementos si solo se saben las palabras para contar hasta el tres. Los niños aprenden, como se propone en estas visiones, primero un pequeño segmento de las palabras para contar (que va creciendo poco a poco), y paralelamente, más no simultáneamente, van descubriendo sus asignaciones cardinales.

Por último, otro comentario de estos autores menciona que responder ¿cuántos objetos hay? no implica que la persona ya tenga el concepto de número natural. Este punto tiene sentido. Uno de los factores que pueden considerarse fundamentales y que al parecer no se obtiene del conteo es saber que los números naturales son infinitos, que dado cualquier número se puede conseguir uno más grande. El conteo y lo que se requiere para este son factores que permiten hablar de una comprensión básica y fundamental, más todavía no completa, de número natural.

En el enfoque de Rips y sus colegas los niños conforman un esquema con ciertas habilidades innatas que van a permitir formular la idea de función 1-a-1, entender la relación de la función sucesor y otras combinaciones de las representaciones. Además de eso, los niños deben comprender que hay un único número inicial, que cada número tiene un sucesor y un predecesor (excepto el primero) único, y que los números naturales son los sucesores de otros números naturales. Así se supone que los niños forman un esquema para los números que especifica su estructura ya como una secuencia infinita contable. El niño con el esquema inicia entonces ya con generalizaciones sobre número, no sobre operaciones con objetos físicos.

Tener una comprensión por lo menos tácita, como mencionan los autores, de estos axiomas de Dedekind-Peano sí resulta ser un aspecto fundamental para hablar de la posesión del número natural, ya que estos son aspectos primordiales de la estructura numérica de los naturales. Sin embargo; pareciera que es posible llegar a este esquema también a través de las condiciones que se han planteado anteriormente que conciben al número como abstracción del conteo de objetos. Saber que hay un único número inicial y que cada número tiene un sucesor y un predecesor podría estar ligado al aprendizaje de la secuencia ordenada de las palabras para contar, además para contar se requiere la comprensión de correspondencias 1-a-1, condición que se plantea también como necesaria dentro del esquema. El único aspecto que no es evidente que se derive del conteo, pero que sí se considera fundamental para la posesión del concepto de número, es la comprensión de la infinitud de los números naturales. No obstante, los autores mencionan que la capacidad de reconocer que no hay un número natural mayor que todos parece llegar uno o dos años después de que los niños han aprendido a contar (Rips et al., 2008, p. 639) y además parece tener relación con el conocimiento de números mayores que 100, ya que al poder lidiar con números grandes se sugiere que han aprendido lo suficiente sobre cómo ir generando los naturales y esto les permite ir comprendiendo las implicaciones sobre la infinitud de estos números (Hartnett, 1991).

1.7 Respuesta a la pregunta planteada

Este capítulo tenía como objetivo realizar una revisión de ciertas concepciones contemporáneas que existen en la literatura sobre las condiciones que deben satisfacerse para poseer el concepto de número, buscando de esta manera plantear una serie de condiciones que sean una síntesis razonable de las posturas presentadas, que permitan entender aproximada y provisionalmente a qué se hará referencia cuando se mencione que una persona posee el concepto de número, de tal manera que no se dé por sentado el rol que pueda desempeñar el lenguaje.

Dentro de los puntos de convergencia claros en esta revisión, lo primero que hay que anotar es el interés que hay sobre un sistema numérico particular y este corresponde al de los números naturales. Los números naturales aparecen como base no solo para una construcción histórica o teórica de los otros sistemas numéricos, sino que además el proceso de aprendizaje de los números inicia con estos, como se pudo evidenciar en varios de los enfoques presentados. Los números naturales se vuelven el cimiento de los otros sistemas numéricos y una búsqueda por lo fundamental en la posesión del concepto de número, se enfocará en lo fundamental de la posesión del concepto de número natural.

Según la mayoría de los trabajos presentados (todos a excepción del artículo de Rips y sus colegas) el primer acercamiento que el ser humano tiene al concepto de número natural es por medio de la cantidad. En este panorama, el proceso de conteo se vuelve crucial para superar ciertas habilidades cuantitativas primarias y empezar a acercarse a lo numérico. No obstante, en el conteo se está presuponiendo la necesidad del lenguaje en el uso de palabras (señas o símbolos) que representan las cantidades, y como el papel del lenguaje estará siendo evaluado en los otros capítulos de la tesis, en este momento se descartarán las habilidades directamente relacionadas con las palabras para contar[12] [13]. Teniendo presente lo anterior y de acuerdo con los enfoques presentados, para contar se hace necesario:

1. Capacidad de individualizar los objetos; es decir, poder determinar qué elementos forman parte de un solo objeto y cuáles están conformando más objetos. Esto es crucial para poder contar los objetos de manera correcta, no contar más o menos de los que se debería (Rips et al., 2008, p. 627).
2. Evidenciar una comprensión de las correspondencias 1-a-1. Ejemplos: poder repartir de a un solo dulce a cada persona en una reunión, o poder nombrar a los miembros de la familia, nombrando una sola vez a cada uno o como se ha propuesto en varias pruebas para evaluar esta habilidad, ante una serie de objetos dispuestos sobre una superficie, por ejemplo canicas, ser capaz de colocar otra serie de objetos, por ejemplo, dados, de tal manera que a cada canica le corresponda solamente un dado y a cada dado le corresponde una sola canica (B. Butterworth, 2005; Rips et al., 2008).
3. Capacidad de agrupamiento. Poder percibir una serie de objetos como un solo grupo (B. Butterworth, 2005; Lakoff & Núñez, 2000). Butterworth referencia un artículo de Feigenson del 2004 (*Infants chunk object arrays into sets of individuals*) y otro de Wynn del 2002 (*Enumeration of collective entities by 5-month-old infants*) como evidencia de que los bebés son capaces de tratar colecciones de objetos como una sola unidad.

Adicionalmente, se presentan como necesarias otro tipo de habilidades, que permiten ir extendiendo las propiedades iniciales del conteo. Esas habilidades son las siguientes:

4. Comprender las transformaciones que pueden tener las colecciones de objetos que no afectan el resultado en el proceso del conteo. Ejemplos: mover los

[12] En el capítulo 2 se mostrará que no es evidente la necesidad de estas palabras para contar para la posesión del concepto de número.

[13] Esto no implica que, en las habilidades restantes, que van a ser presentadas, el lenguaje no desempeñe ningún papel. Esta es una cuestión que se reconoce que debe ser planteada y discutida con detenimiento. No obstante, en esta aclaración preliminar, lo que se busca es no presuponer directamente el papel del lenguaje. Se evaluará a lo largo de la tesis si el lenguaje podría estar desempeñando un papel dentro de esta manera de comprender la posesión del concepto de número.

objetos, ubicarlos de manera que ocupen un mayor o menor espacio, cambiar el orden de su ubicación, entre otros (B. Butterworth, 2005; R. Gelman & Gallistel, 1978; Lakoff & Núñez, 2000).

5. Comprender las transformaciones que pueden tener las colecciones de objetos que sí pueden afectar el resultado final del conteo. Por ejemplo, agregar o quitar objetos (B. Butterworth, 2005).
6. Extender la capacidad de contar objetos visibles a otras modalidades. Es decir, entender que se pueden contar cosas como: canciones, ladridos, galaxias, sueños, creencias, etc. (B. Butterworth, 2005; R. Gelman & Gallistel, 1978). En este punto, se empieza a desligar el concepto de número de los objetos físicos.

Por otro lado, en ciertos enfoques se propusieron una serie de habilidades cuantitativas como la subitización o sistemas innatos como los sistemas centrales de Feigenson y sus colegas que permitirían fundamentar lo numérico; no obstante, el tipo de habilidades sustentadas por las propuestas eran precisamente esas que se mencionan como comunes entre el ser humano y los animales y que ha sido posible reconocer también en lo bebés. Estas habilidades o sistemas no ofrecen una respuesta de cómo sería posible superarlos para llegar a poseer el concepto de número y no es claro tampoco que lleguen a ser un factor necesario para la posesión del concepto.

Por otra parte, a pesar de que el conteo permita en cierta medida superar las habilidades cuantitativas primarias, hay otra serie de requisitos que se encontraron como fundamentales para la concepción de número natural (Buijsman, 2017; Rips et al., 2008) y que, además, no es claro que estos puedan derivarse del conteo.

En matemáticas, uno de los sistemas más utilizados que permite fundamentar los números naturales es el sistema axiomático de Peano, también conocido como Dedekind-Peano. Este sistema fue propuesto por el matemático italiano Giuseppe Peano en el año 1889 en su obra "*Arithmetices principia, nova methodo expósita*" (Peano, 1889). Los axiomas que plantea para fundamentar los números naturales son los siguientes[14]:

1. 0 es un número natural.[15]
2. Para todo número natural n, $S(n)$[16] es un número natural.
3. Para cualesquiera naturales m y n, $m = n$, si y solamente si, $S(m) = S(n)$
4. 0 no es el sucesor de ningún número natural.
5. Si K es un conjunto tal que: 0 pertenece a K y para cada número natural n, si n pertenece a k, entonces S(n) también pertenece a K; entonces K contiene todos los números naturales.

Los axiomas 1, 2 y 4 permiten la construcción de los números naturales a partir del primer número natural (0 o 1) y de la función sucesor. El axioma 3 garantiza que la función sucesor es 1-a-1 (es decir que dos números naturales diferentes no pueden tener el mismo sucesor) y el axioma 5, conocido también como el principio de inducción, es utilizado para demostrar cuándo una propiedad se cumple para todos los números naturales. A partir de estos axiomas es posible derivar las propiedades fundamentales de los números naturales; entre esas, que los números naturales son infinitos, que tienen un elemento inicial y que se pueden construir los demás números a partir de él y de la función sucesor, permite además reconocer el tipo de orden y la estructura general que tienen los números; además de brindar una herramienta para poder determinar qué propiedades cumplen todos los números naturales.

Esta construcción que permite fundamentar los números naturales no solo es altamente aceptada y utilizada por los matemáticos, sino que ha sido la base para varios estudios sobre el aprendizaje y el entendimiento del concepto de número natural (Buijsman, 2017; De Cruz et al., 2010; R. Gelman & Gallistel, 1978; Rips et al., 2008), por lo que se

[14] La versión original de Peano consta de 9 axiomas; sin embargo, en versiones actuales solo se presentan 5 de estos por considerar los otros 4 lógicamente válidos en una lógica de primer orden con igualdad (van Heijenoort, 1967).

[15] En la mayoría de las versiones actuales, los números naturales inician en 0. En la versión original de Peano, inician en 1 (Peano, 1889).

[16] $S(n)$ es una función 1-a-1 definida sobre los números naturales, tal que a cada natural n le hace corresponder el número natural $n + 1$.

considera pertinente también para el presente trabajo como una fundamentación apropiada de los números naturales.

Una persona con la capacidad de comprender y enunciar los 5 axiomas de Peano sin duda tendrá un buen entendimiento de lo que son los números naturales; sin embargo, pareciera excesivo exigir el conocimiento de estos 5 axiomas para garantizar una comprensión básica de los números naturales; más aún cuando estos axiomas, por lo general, ni siquiera son enseñados en los sistemas de educación básica y media.

De los 5 axiomas, el principio de inducción parece el menos fundamental para una comprensión básica de número natural; es decir, por supuesto se hace necesario para realizar demostraciones de propiedades de estos números y para garantizar que se está hablando del conjunto completo de los números naturales, pero su utilidad pareciera ser más para el ámbito lógico. Además, se ha dicho que tanto niños como adultos suelen tener bastantes problemas razonando vía inducción matemática (Palla, Potari, & Panagiotis, 2011; Styliandes, Styliandes, & Philippou, 2007), luego, como reflexiona Buijsman, es poco probable que el razonamiento numérico se presente reflejando este principio de inducción matemática (Buijsman, 2017, p. 13). No obstante, al tener presente que no se comprenden todos los números a través del conteo (es posible una comprensión del número 357 sin necesidad de haber contado 357 objetos), hace falta, como propone Buijsman, ser capaz de extender aquellas propiedades de los números que otorga el conocimiento de ellos a partir del proceso de conteo, a otros números más grandes, y este proceso, aunque no es de inducción matemática, si podría plantearse como un proceso inductivo.

¿Qué se debería saber de los axiomas? Concordando con Rips, debería haber una comprensión tácita de lo que implican estos, en particular, una persona que posea concepto de número debería cumplir con los siguientes aspectos fundamentales:

7. Comprender que los números cumplen reglas, que no se dan de manera aleatoria.
8. Comprender que los números son interminables, que dado cualquier número siempre es posible encontrar uno más grande.
9. Saber que hay un número inicial.
10. Comprender que los números tienen un orden determinado.

   a. Dado cualquier número poder determinar cuál es el número siguiente.

11. Extender las propiedades que se derivan del conocimiento y manejo de los primeros números obtenidos por el conteo a cantidades numéricas más grandes. El aprendizaje de los otros números se basa en la comprensión y abstracción de las propiedades de los primeros (Buijsman, 2017).

Esta última sección de condiciones requiere una mayor familiarización con lo numérico, son condiciones que seguramente se presentan mucho después del primer acercamiento que permite el conteo. Por ejemplo, como se había visto anteriormente, la condición 7, parece cumplirse uno o dos años después de aprender a contar (Rips et al., 2008) y parece estar relacionada con el conocimiento de números mayores que 100 (Hartnett, 1991). No obstante, son condiciones fundamentales de los números naturales sin los cuales sería muy difícil afirmar la posesión del concepto de número natural. Conocer y tener algún tipo de manejo de una serie de números naturales, como lo permite el conteo, no es suficiente para afirmar que se posea un concepto de número natural.

Como se aclaró al inicio del capítulo, las condiciones presentadas no son una especificación de todas las condiciones necesarias y suficientes de la posesión del concepto de número, sino que forman una aclaración preliminar que permitirá entender aproximada y provisionalmente a qué se hará referencia cuando se mencione que una persona posea concepto de número.

2. El lenguaje como tecnología cognitiva

En el primer capítulo se realizó una indagación sobre una serie de condiciones que permitieran esclarecer qué se entendería al afirmar que una persona posee el concepto de número. Se plantearon once condiciones que buscan recoger de una manera razonable las convergencias halladas en las posturas de diversos autores contemporáneos que fueron estudiadas. Además, estas condiciones se propusieron, de tal manera que, se pudiera plantear de manera genuina la pregunta por el papel del lenguaje en la posesión del concepto de número; es decir, se buscó tener una aclaración de la posesión del concepto de número que no involucrara directamente el lenguaje.

Dentro de las conclusiones recalcables de este análisis, se obtuvo que, en la mayoría de los enfoques presentados, el proceso de conteo se propone como fundamental para superar las habilidades cuantitativas primarias y empezar a acercarse a la posesión el concepto de número. No obstante, dentro de los requisitos que se plantean para contar, se postula siempre el uso de las palabras o símbolos numéricos, lo que genera la cuestión sobre la dependencia de la posesión del concepto de número sobre el lenguaje, ¿es posible que sin el acceso a esas palabras o símbolos que otorga el lenguaje, se pueda poseer el concepto de número?

A pesar de que, en la revisión del capítulo anterior, los autores siempre dieran por sentado la necesidad de estas palabras para contar para superar las habilidades cuantitativas primitivas, no es del todo claro que sin ellas no se pueda llegar a poseer el concepto de número. El mismo Butterworth, en el año 2008, junto con otros autores, muestra que los niños que son hablantes monolingües de dos lenguas australianas con un vocabulario numérico muy restringido poseen los mismos conceptos numéricos que un grupo comparable de niños indígenas australianos de habla inglesa[17] (B. Butterworth, Reeve, Reynolds, & Lloyd, 2008). Este caso estaría mostrando que la posesión de aquellos conceptos numéricos que mencionan los autores no está dependiendo del vocabulario numérico.

¿El lenguaje desempeña algún tipo de rol en la posesión del concepto de número? Esta pregunta cobra valor no solo pensando en complementar la indagación sobre el tipo de condiciones que se requieren para la posesión del concepto de número, sino que, además, la relación que se cuestiona no está determinada aún; por un lado, pareciera haber un consenso que ofrece una respuesta positiva planteando la necesidad del lenguaje en un rol aparentemente básico; sin embargo, por otro lado, pareciera haber evidencia de que la posesión del concepto de número es completamente independiente del lenguaje.

Esta discusión pareciera heredarse del debate existente acerca del lenguaje y la cognición, por un lado, podría plantearse un relato de la prioridad de la cognición sobre el lenguaje, donde se plantea que primero el ser humano tiene la capacidad de desarrollar ciertos procesos numéricos y luego con el fin de hacerlos socialmente disponibles, implementa un sistema representacional que permita exteriorizar dichos procesos. Por otro lado, podría pensarse que el lenguaje va a ser prioritario respecto a la cognición, el ser humano podría necesitar de palabras numéricas y posiblemente de cierto tipo de rasgos fundamentales que posee el lenguaje para poder acceder, comprender y lograr una sistematización de lo numérico; sin el lenguaje, podría ser posible que no hubiese forma de pensar en la manipulación de los números, ni en terminar de comprender lo numérico como una estructura, como un sistema. Ahondar en la discusión sobre el papel que desempeña el lenguaje en la posesión del concepto de número, permitirá también dar una nueva perspectiva en ese debate entre lenguaje y cognición.

Por otro lado, otro punto que llama la atención es que el lenguaje es un factor que parece siempre recalcable cuando se mencionan casos de personas que, aparentemente, carecen del concepto de número. Ejemplo de esto son las comunidades indígenas que poseen restricciones numéricas muy fuertes a la vez que restricciones en su lenguaje (Pirahã y Mundurukú en Brasil, Warlpiri y Warnindhilyagwa en Australia -algunas de estas

[17] Este caso será analizado con detenimiento en el capítulo 3.

se han presentado o se presentarán a lo largo del escrito-) (B. Butterworth et al., 2008; Everett, 2005; Pica, 2004).

Además de lo anterior, aclarar la relación que hay entre el lenguaje y lo numérico puede resultar importante para el ámbito educativo. Podría darse el caso que, si el lenguaje resultara ser fundamental para la posesión del concepto de número, esta relación dé nuevas pistas y nuevas herramientas sobre cómo abordar la búsqueda de las posibles causas fundamentales de la dificultad en el aprendizaje de la matemática, aspecto que se reconoce como uno de los temas más importantes y problemáticos en la educación escolar.

Las anteriores razones hacen que sea interesante aclarar el papel que pueda desempeñar el lenguaje en la posesión del concepto de número. El estudio de la relación entre el lenguaje y las habilidades numéricas se ha datado a partir del siglo XIX donde gracias a distintas investigaciones neuropsicológicas, algunos trastornos del lenguaje se han encontrado ligados con problemas en las habilidades numéricas y viceversa, algunos trastornos aritméticos se han relacionado con inconvenientes en el lenguaje. Ejemplo: Se observó que parte del síndrome de la afasia, que es un trastorno del lenguaje, solía presentarse con problemas para realizar cálculos. Por otro lado, la acalculia, que es una patología cerebral que causa una alteración en las habilidades de procesamiento matemático (Ardila & Rosselli, 2002), se clasifica en dos tipos, donde la acalculia del segundo tipo, conocida como acalculia secundaria, está asociada con la afasia (Delazer & Girelli, 1999).

Otro ejemplo que no es determinante pero sí bastante sugerente sobre la relación entre lo lingüístico y lo numérico es el caso de la comunidad indígena del Brasil Pirahã que ha sido de interés para múltiples investigadores por casi 40 años. Lo que ha llamado la atención es que el lenguaje de los Pirahã es bastante peculiar; dentro de sus particularidades se tiene que no poseen palabras para designar números de ningún tipo; ni para designar cardinales, ni ordinales, ni palabras de números que permitan contrastar nombres, pronombres o verbos, ni términos cuantificadores. Como consecuencia de esto, Daniel Everett, que ha sido el principal investigador de esta comunidad indígena, sugiere que los Pirahã no tienen concepto de conteo, ni de número de cualquier clase (Everett, 2005, p. 621). Aquí se presenta una conexión fuerte entre los términos del lenguaje y el concepto de número, que incluso podría llegar a postular el lenguaje, con ciertas condiciones, como factor necesario para la posesión del concepto de número.

Además, en la literatura es posible encontrar distintas referencias que sustentan la relación entre el lenguaje y lo numérico. Dentro de estos podemos encontrar particularmente a Butterworth y sus colegas que afirman:

> […] Además, las habilidades numéricas están mediadas por diferentes sistemas de notación para representar cantidades que, como el lenguaje, están reguladas por mecanismos léxicos, semánticos y sintácticos. Sin embargo, queda por aclarar hasta qué punto el procesamiento y las representaciones de los numerales difieren del procesamiento y las representaciones de otras categorías lingüísticas (y semánticas). (Brian Butterworth et al., 1999, p. 485)

En esta cita Butterworth y sus colegas señalan un aspecto en común relevante entre lo numérico y lo lingüístico, tanto el lenguaje como las notaciones numéricas pueden ser analizados como sistemas gramaticales, como sistemas que deben cumplir ciertas reglas léxicas, semánticas y sintácticas. Acá no se está estableciendo una relación de dependencia, pero el hecho de hallar aspectos estructurales en común hace más viable sugerir una relación entre estos dos dominios.

Como último ejemplo de la incidencia del lenguaje sobre la posesión del concepto de número, se presenta la siguiente cita de Butterworth, esta vez en el artículo “The development of arithmetical abilities”. Butterworth afirma:

> Existe evidencia de que la estructura del sistema de las palabras numéricas puede acelerar o ralentizar la adquisición de conceptos aritméticos, por lo que los niños criados en idiomas con un sistema muy regular, como el chino, adquieren algunos conceptos aritméticos anteriormente. (B. Butterworth, 2005, p. 15)

En esta cita se indica en mayor detalle el rol que puede desempeñar el lenguaje; el autor afirma que el lenguaje está relacionado con la velocidad de adquisición de los conceptos aritméticos (aspecto que también fue sugerido por Buijsman, como se vio en el capítulo 1), se podría pensar entonces en el lenguaje como una especie de medio que permite acelerar o ralentizar aquel proceso de aprendizaje.

Para mostrar que el lenguaje efectivamente puede influir en la posesión del concepto de número, se presentará el lenguaje como una tecnología cognitiva para este proceso. Se suele hablar del lenguaje como una herramienta o instrumento para la comunicación, muchas veces usando estos términos como sinónimos y haciendo énfasis en que una herramienta o instrumento permite llevar a cabo una actividad concreta, en este caso, comunicar (Koster, 2009, p. 61,70). En otros casos, es posible encontrar distinciones en los términos, por ejemplo, herramienta se entiende que generalmente es para construir, reparar o modificar, por lo que la herramienta del lenguaje puede ayudar a amplificar las habilidades comunicativas de quién la usa; por otro lado, instrumento puede ser visto para instruir o guiar un proceso, por lo que el lenguaje como instrumento puede ayudar a gobernar y manejar las habilidades comunicativas del usuario (Gorayska, Marsh, & Mey, 2001). En ambas situaciones, tanto cuando se reconocen herramienta e instrumento como sinónimos, como cuando no, estos términos están siendo utilizados para resaltar que el lenguaje está sirviendo como medio que permite llevar a cabo algo determinado; sin embargo, los conceptos de herramienta y de instrumento no parecen resaltar, ni adecuarse a ninguna otra característica del lenguaje. En este trabajo, se utiliza un término diferente, se plantea el concepto de tecnología como más apropiado, ya que cumpliendo con la misma función que cumplían los otros términos, permite además abarcar de mejor manera la complejidad y las propiedades del lenguaje.

2.1 Lenguaje como tecnología

Se entenderá como lenguaje el sistema estructurado de comunicación humano que se da por medio signos lingüísticos como la palabra hablada o escrita, gestos y señas.

Al parecer, la primera persona en mencionar la idea del lenguaje como una tecnología fue Douglas McArthur en el año 1987 en el artículo titulado *“le langage considéré comme une technologie*”. En este texto McArthur afirma que el lenguaje se puede considerar como una colección de herramientas y procesos que sirve para diversas necesidades (comunicar, expresar, etc.) y esta es precisamente la noción que él presenta de tecnología (McArthur, 1987, p. 158). Además de esto, según McArthur, el lenguaje como otras tecnologías es el producto de la invención humana, se elabora a lo largo de un período de tiempo y continúa cambiando según las necesidades que se presenten.

Ya con este primer acercamiento se empieza a reconocer propiedades comunes y fundamentales entre la tecnología y el lenguaje; es posible que haya similitudes a nivel estructural y que además al ser construcciones humanas, ambos sean susceptibles de cambio y evolución. No obstante, hace falta una revisión más detallada de estos y de otros posibles factores comunes que lleven a plantear como plausible la idea del lenguaje como tecnología.

Después de una revisión, uno de los artículos más detallados y que se tomará aquí como base para entender qué es una tecnología es "*The nature of technology"* de Brian Arthur donde el autor busca argumentar qué es tecnología y cómo esta evoluciona (Arthur, 2009). A continuación, se revisarán varios puntos que define el autor sobre lo que debe ser una tecnología.

La definición más básica que Arthur presenta de tecnología es la tecnología vista como *un medio para cumplir un propósito humano*. La tecnología, dice el autor, puede ser simple o compleja, puede ser material o no. Una tecnología proporciona una funcionalidad, puede tener muchos propósitos específicos, pero la funcionalidad es entendida como la tarea genérica que lleva a cabo.

Es de recalcar en esta definición que la tecnología se plantea como exclusivamente humana. Cuando Arthur habla de propósito humano posiblemente lo hace en el mismo sentido en que McArthur menciona que una tecnología es el producto de la invención humana; puesto que una tecnología, en principio, podría apuntar a distintos objetivos "no humanos". Por ejemplo, dispositivos diseñados para el entretenimiento de perros y gatos; actualmente, existen tecnologías como lanzadores automáticos de pelotas, o proyectores de pequeños animales en movimiento para que tanto perros como gatos puedan entretenerse por su propia cuenta. Otro ejemplo son tecnologías empleadas para evitar la extinción de especies animales, como tecnologías para el seguimiento como los GPS o tecnologías para el cuidado, como implantes que permitan acceder a datos sobre la salud del animal. Un último ejemplo podrían ser las tecnologías de prótesis para animales enfocadas en mejorar su movilidad y bienestar. No se desconoce que detrás de este tipo de tecnologías con propósitos "no humanos" pueda haber un interés humano, como el descanso por no tener que arrojarle la pelota al perro, o la supervivencia que se va garantizando en cierto grado si no se pierde el equilibrio natural entre las especies, o la sensación de bienestar que causa la idea de ser altruista y ayudar a los animales con dificultades; no obstante, no hay que dejar de reconocer que puede haber tecnologías que, por lo menos en su diseño, estén dirigidas a propósitos no humanos.

Por otro lado, parece necesario hacer explícito el hecho de que la tecnología debe ser considerada como un producto o proceso *construido* para un fin particular, el hecho de plantear la tecnología como un medio cualquiera para cumplir un propósito, concede que cualquier rama utilizada como apoyo al caminar, o cualquier roca que permita abrir una nuez, sea considerado tecnología, y ese no es el tipo de noción que se está buscando. Una tecnología de ese tipo no estaría distanciándose de la noción de herramienta o instrumento (dando la posibilidad a estos últimos de no ser objetos necesariamente diseñados o construidos).

Ahora, el hecho de que la tecnología sea construcción humana la hace susceptible de variaciones, de cambios, de mejoras y evolución, como reconoce Arthur posteriormente al afirmar que las tecnologías no son estáticas, constantemente varían su arquitectura y se reconfiguran conforme los propósitos de estas van variando (Arthur, 2009). No obstante, el asunto no es que las tecnologías en sí mismas evolucionen; es decir, sería difícil concederle a un dispositivo o proceso particular la capacidad de evolucionar. Quizás lo más cercano a eso es el actual desarrollo del Machine Learning o Aprendizaje Automático, donde se explora la construcción de algoritmos de los que se dice son capaces de aprender, haciendo referencia a que estos algoritmos son capaces de hacer predicciones, tomar decisiones o realizar generalizaciones a partir de una serie de datos que sirven como ejemplos. De esta manera, un algoritmo con Machine Learning puede ir mejorando su desempeño en una actividad específica; no obstante, esto no es suficiente para concederle la capacidad de evolucionar. Finalmente, el algoritmo sigue funcionando de la misma manera en que fue programado, sigue desempeñando el mismo propósito, no hay nada que haya cambiado en él de manera estructural que implique una variación de funcionamiento o de finalidad. Por lo tanto, no es que las tecnologías cambien o evolucionen, sino que al ser producto de diseño y construcción humano son susceptibles a ser modificadas, a ser mejoradas por el mismo ser humano. Dependiendo del propósito que se le otorgue a una tecnología particular, del medio hacia donde vaya dirigida y de las necesidades que se presenten de acuerdo con esos factores, es que el ser humano plantea distintas versiones, modificaciones y mejoras de una tecnología. Por ejemplo, un celular pensado para personas que viven en la playa, en principio plantea necesidades distintas de un celular pensado para personas de la ciudad; mientras que para el primero pueda ser importante que sea resistente al agua, para el segundo posiblemente sería más útil que ofreciera información del tráfico en tiempo real.

Ahora respecto al lenguaje, este es efectivamente un medio que tiene como finalidad la comunicación humana. El lenguaje necesariamente debe ser un medio, entendiendo medio como aquello que sirve para un determinado fin. Si el lenguaje no está cumpliendo su fin, es decir no está comunicando algo, no será lenguaje; es decir, los sonidos, señas o grafías sin propósito, sin sentido no son consideradas lenguaje, precisamente porque no están comunicando. Adicionalmente, como menciona Jan Koster en "*Ceaseless, unpredictable creativity; Language as a tecnhology*" el lenguaje debe ser un medio externo, un medio de acceso público (Koster, 2009, p. 71), debe haber otra persona que sea capaz de entender lo que se está comunicando; si no, tampoco estaría cumpliéndose el rol de comunicar. Por lo tanto, el lenguaje es un medio de acceso público que ofrece como funcionalidad la comunicación humana.

Adicionalmente, respecto al segundo punto que fue tratado, el lenguaje aparece como producto de la construcción humana, que permitió pasar en un principio de ciertos gestos y vocalizaciones limitadas por parte de los homínidos a una apropiación de estos que posiblemente fue permitiendo su adaptación a nuevas necesidades de intercambios de información (Corballis, 2010, 2011). Al inicio de los tiempos, posiblemente podría bastar con signos que expresaran rechazo, aceptación o alertas de peligro; pero, a medida que el ser humano se fue desarrollando como sociedad fueron apareciendo nuevas exigencias por una comunicación más rica y más explícita. El nuevo lenguaje debió permitir resolver problemas, hablar de experiencias pasadas o planificar actividades grupales futuras, así como expresar pensamientos y sentimientos (Mufwene, 2013). También hubo una modificación del lenguaje en el momento en que se utilizó para la construcción de narrativas ficticias, para la creación artística. Esas nuevas necesidades que causaron modificaciones y ampliaciones de vocabulario tuvieron que haber implicado además de nuevas finalidades para el lenguaje, nuevas formas de estructurarlo; no se requiere el mismo tipo, ni complejidad estructural para expresar una alerta de peligro, que para crear una fábula. Las reglas gramaticales habrán tenido que ser adaptadas cuando se empezó a explorar el lenguaje por medio de la ironía o el sarcasmo, donde ya el significado de una expresión no necesariamente va a estar completamente determinado por el significado de sus componentes y de su estructura.

El lenguaje ha venido modificándose continuamente de acuerdo con las nuevas necesidades que van surgiendo en el tiempo (Mufwene, 2013) y se han presentado cambios que han ampliado el tipo de finalidades que podría tener el lenguaje y que han permitido redirigir en algún sentido su gramática para que dé cuenta de esto. Actualmente, el lenguaje sigue en constante cambio, continuamente se evalúa la introducción o eliminación de palabras y reglas gramaticales en los distintos idiomas, por citar un ejemplo.

Sin embargo, no es claro que esas modificaciones que ha tenido el lenguaje hayan sido resultado precisamente de una planeación o de un diseño de este, autores como Mufwene consideran que los cambios se dan es bajo la presión de cierto tipo de necesidades que van emergiendo, y concuerda con otros autores que afirman que, la gramática es la acumulación de ciertos patrones que surgen de las maneras en que se producen las emisiones del lenguaje (Mufwene, 2013, p. 342); no obstante, es plausible que el diseño se dé, de acuerdo con las necesidades o con lo que van sugiriendo los patrones comunes en el lenguaje, el patrón o la necesidad por sí solos no determinan un cambio en el lenguaje, hace falta un agente que tome la decisión de acatar al patrón o de resolver la necesidad y de determinar en qué manera se hará eso.

Otro aspecto de las tecnologías que plantea Arthur sobre el que se llamará la atención es la estructuración. Según plantea el autor, una tecnología se encuentra compuesta de partes organizadas, es una combinación de componentes para algún propósito, de grupos funcionales que se organizan de manera jerárquica; primero está la tecnología general, luego sus ensambles principales, luego los conjuntos dentro de esos ensambles, y así sucesivamente. Sin embargo, Arthur no exige que la jerarquía sea perfecta, los distintos componentes pueden interactuar y entrelazarse de distintas maneras. El autor también señala que la estructura de la tecnología es recursiva, esto quiere decir que cada parte es a su vez una tecnología, es un medio para un propósito particular. No obstante, él plantea que puede haber tecnologías elementales que solo tengan una parte. Esta idea de la recursividad tecnológica llevada a todos los componentes plantea una dificultad y es que ocasiona que no se pueda exigir que las tecnologías sean compuestas o sean recursivas. Si una tecnología necesariamente se plantea como compuesta de partes que a su vez son tecnologías, entonces es claro que algo que no tenga partes, no debería ser considerado tecnología; sería extraño y vacío argumentar que, al no tener partes, o al ser en sí misma una parte entonces estaría cumpliendo con el requisito de que sus partes sean tecnologías. Sin embargo, esto no implica que deba desecharse la idea de tecnología como compuesta de partes organizadas y relacionadas entre sí, este parece ser un rasgo característico del tipo de cosas que se suelen aceptar como tecnologías: un computador, un celular, un avión, un satélite, un carro, un GPS, etc., lo importante está en que todos los componentes de una tecnología no deberían ser necesariamente otras tecnologías.

Las tecnologías entonces sí podrían considerarse como compuestas de una serie de partes organizadas, donde estas partes, como reconoce Arthur, se relacionan e interactúan entre sí, y donde, además, es posible reconocer una estructura recursiva; pero, en el sentido en que, el funcionamiento de la tecnología en general depende de sus ensambles principales y a su vez estos dependen de sus partes; sin desconocer que este proceso de recursión para en los componentes básicos. Además, aunque sus componentes estén cumpliendo alguna función específica, como lo hacen las tecnologías, al no estar necesariamente compuestos por otras partes, no hay razón para suponer que todas las componentes deban ser tecnologías.

Respecto al lenguaje, este sin duda es una estructura bastante compleja que, como tecnología, puede ser vista como un árbol (no perfecto) con muchas ramificaciones, cruces y enlaces, donde en particular, la estructura general dependerá de sus factores componentes.

Una de las maneras de entender el árbol del lenguaje puede ser desde la morfología, la funcionalidad de este árbol es estudiar la estructura interna de las palabras, dentro de las cuales se pueden encontrar como componentes las raíces, los prefijos y los sufijos. Las diferencias formales dentro de las palabras pueden servir para distintos propósitos lingüísticos, entre ellos a la creación de nuevos ítems lexicales y a la identificación de la estructura gramatical (Stephen R (n.d.), 2016)..

Otro enfoque diferente de analizar la estructura del lenguaje es desde un árbol que jerárquicamente puede contener al árbol anterior. El lenguaje puede estudiarse también desde las formas en que las palabras se combinan para construir unidades superiores o más complejas que estas y las relaciones que se encuentran entre estas combinaciones, es decir, desde el árbol de la sintaxis. Dentro de esta estructura se encuentran como componentes los constituyentes sintácticos, como las palabras, los sintagmas y las oraciones gramaticales. Cada constituyente tiene una función dentro de la estructura jerárquica de una oración. Cada constituyente, además, suele poderse descomponer en otros constituyentes (Bloomfield, 1933).

También es posible estudiar el lenguaje desde su semántica donde se busca estudiar el significado de expresiones sintácticas bien formadas. Aquí es posible encontrar también una jerarquía en la construcción de expresiones complejas a partir de otras más simples que sean interpretables semánticamente (Lyons, 1995). Este árbol, que revisa desde una perspectiva diferente el lenguaje, podría contener dentro de sus ramas los componentes de los árboles anteriores.

Como último ejemplo, el lenguaje es posible estructurarlo a nivel fonológico. La fonología estudia cómo los sonidos son organizados e implementados en el lenguaje, cómo funcionan los sonidos dentro de un lenguaje. En este caso el lenguaje se puede analizar como un sistema compuesto de fonemas (que son unas de las unidades de sonido) donde se puede buscar estudiar qué sonidos pueden agruparse dentro de fonemas (Bloomfield, 1933).

Efectivamente, el lenguaje, como la tecnología, puede verse como compuesto de partes organizadas, como combinación de componentes para algún propósito, de grupos funcionales que se organizan de manera jerárquica.

Los anteriores aspectos se plantean como fundamentales en el entendimiento de una tecnología. En resumen, una tecnología es un medio para el cumplimiento de un propósito. La tecnología como producto de una construcción humana es susceptible de variaciones, de cambios y de mejoras. Además, la tecnología está conformada por una estructura recursiva donde sus componentes pueden organizarse en una clase de jerarquía, en la que los componentes interactúan entre sí y donde el funcionamiento de la tecnología está determinado por sus partes componentes y por la interacción entre ellos. El lenguaje, como se revisó, cumple con estos aspectos fundamentales.

2.2 Lenguaje como tecnología cognitiva

Schoenfeld en *"Cognitive science and mathematics education"* afirma:

> Una tecnología es cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en actividades de pensamiento, aprendizaje y actividades relacionadas con resolución de problemas. Estos medios incluyen los símbolos de sistemas, tanto de escritura como lógicos, sistemas de notación matemática, modelos, teorías y medios pictóricos, entre otros. Siendo las herramientas cognitivas que más han llamado la atención las de notación matemática (Cassirer, 1910, 1957; Kaput, 1985; Kline, 1972), las de lengua escrita (Goody, 1977; Greenfield, 1972; Olson, 1977; Ong, 1982; Scribner & Cole, 1981) y los símbolos de números (Menninger,1969). (Schoenfeld, 1987, p. 91)

En esta cita, Schoenfeld ya está postulando al lenguaje, en particular la lengua escrita, como un medio, una tecnología que ayuda a trascender ciertas actividades cognitivas de pensamiento, aprendizaje y resolución de problemas. En la sección anterior, se vio que el lenguaje es un medio para la comunicación, este es su propósito principal como tecnología, pero lo anterior sugiere que es posible que el lenguaje sea un medio para el cumplimiento de otros propósitos cognitivos diferentes. A continuación, se presentará una serie de ejemplos que ofrecen evidencia del tipo de impacto que puede tener el lenguaje en el desarrollo de ciertos procesos cognitivos.

Majid y sus colegas en el año 2004 argumentaron que el lenguaje juega un papel importante en la estructuración o reestructuración de la cognición espacial. En el estudio se menciona, que según investigación reciente, los marcos de referencia, que según el autor son los conceptos más fundamentales de la cognición espacial varían de acuerdo a los idiomas y a la cultura (Majid, Bowerman, Kita, Haun, & Levinson, 2004, p. 113). Los autores concluyen que el lenguaje puede desempeñar un papel central en la reestructuración de la cognición humana (Majid et al., 2004, p. 113)

En un estudio realizado por Brown y Lenneberg en el año 1954 se evalúo la habilidad de reconocer distintos colores en relación con la codificación disponible para esos colores. Se concluyó que la habilidad de reconocimiento sí estaba ligada a la posibilidad de codificación; entre más códigos o términos se tengan para catalogar los colores, mayor será la habilidad de reconocimiento. Además, los autores sugieren que es posible que lo codificable esté relacionado con los procesos cognitivos en general (Brown & Lenneberg, 1954, p. 452).

En el año 1999 Astington y Jenkins realizaron un estudio con niños de 3 años, donde buscaban evaluar la relación entre el desarrollo del lenguaje y el desarrollo de la teoría de la mente (entendiendo esto último como la capacidad de asignar estados mentales a otras personas y a sí mismo). De la teoría de la mente se evaluó particularmente la capacidad de atribuir falsas creencias y de distinguir entre apariencia y realidad. Se encontró que las tareas de las habilidades lingüísticas permitieron predecir el desempeño en las tareas de teoría de la mente (Astington & Jenkins, 1999, p. 1311). Además, los resultados sugieren, según los autores, que las características estructurales del lenguaje (haciendo referencia a la sintaxis) son fundamentales para el desarrollo de la habilidad para entender la falsa creencia (Astington & Jenkins, 1999, p. 1318).

Adicionalmente, Olson en el año 1976 afirma que como el lenguaje escrito trasciende las limitaciones de memoria del lenguaje oral, se convierte en un medio más efectivo de almacenamiento de información; además, argumenta que el lenguaje escrito facilita el análisis lógico de la consistencia o contradicción de los argumentos (Olson, 1976).

La siguiente serie de aspectos del lenguaje son recalcables y pueden resultar importantes para la cognición, aunque falta evidencia para determinar si efectivamente el lenguaje desempeña un papel en estas.

Debido al aspecto estructural y recursivo de la tecnología del lenguaje, este se convierte en un modelo para ciertas actividades cognitivas que manejen procesos estructurales similares (Dascal, 2004, p. 45); por ejemplo, las clasificaciones y los procesos de análisis y síntesis, donde hay que hacer una separación de partes o hay que hacer composición de estas en agrupaciones. En estos casos, la familiaridad con la estructura del lenguaje puede ayudar al desarrollo de esos procesos, adicionalmente puede facilitar también el aprendizaje de conocimiento que sea presentado de alguna de esas maneras.

En otro sentido, las expresiones del lenguaje no precisas o no determinadas pudieron haber servido como herramienta para nuevos tipos de conocimiento. Ejemplo de esto son las lógicas no clásicas, como las lógicas temporales o difusas. Las distintas escalas de “indeterminación” que admite el lenguaje pueden ser una herramienta que permita aumentar la precisión en la comprensión de distintos fenómenos indeterminados.

Por otro lado, Dascal en el 2004 propone que la existencia de formas canónicas como lo son los conectivos lógicos en el lenguaje natural (si…, entonces… / …por lo tanto…/ …si y solo si…, etc.) de alguna manera van orientando a la persona que habla en determinado hilo de pensamiento, por lo menos, permite que la persona se ocupe solamente de ir completando lo que falta en la expresión. Esas formas canónicas del lenguaje permiten entonces, en cierto sentido, direccionar el pensamiento (Dascal, 2004, p. 50).

Por otro lado, la organización secuencial del lenguaje (por lo menos del lenguaje hablado) facilita otro tipo de procesos cognitivos (Dascal, 2004, p. 46). Puede que esa organización influya en aquellos procesos donde la organización secuencial es fundamental, como en las deliberaciones o argumentaciones, en las demostraciones y en procesos matemáticos, como la identificación de números faltantes en secuencias numéricas con patrones determinados. Además, puede influir en la memorización: la organización en determinadas secuencias puede ser útil como herramienta mnemotécnica.

Adicionalmente, Dascal propone el hecho de que el lenguaje es un sistema basado en reglas como tecnología cognitiva para el mismo aprendizaje del lenguaje o más exactamente, sugiere este hecho como tecnología en la construcción de nuevos símbolos comunicativos. Gracias a la noción de regla, es usual que un niño construya estos nuevos símbolos, nuevas palabras inexistentes, generalizando todo lo que sabe y desconociendo así, las excepciones del lenguaje (Dascal, 2004, p. 46). Sin embargo, el hecho de que el lenguaje basado en reglas sirva como tecnología cognitiva, se encuentra soportado en la propia noción de regla que está permeando el aprendizaje y las generalizaciones en el lenguaje. Por la noción de regla es que el niño piensa que en el lenguaje estas se deben cumplir a cabalidad, sin excepciones y empieza a crear generalizaciones del lenguaje inexistentes pero que cumplan con las reglas. Pareciera que el sistema de reglas en general tiene una influencia en el aprendizaje del lenguaje. Lo anterior, por supuesto, hace más plausible el hecho de que el lenguaje basado en reglas implique que sirva como tecnología en la construcción de nuevos símbolos comunicativos

En resumen, en esta sección se presentaron distintos ejemplos que permiten evidenciar que el lenguaje puede desempeñar un papel importante en distintos procesos cognitivos. En particular, se vio que, según distintos estudios, el lenguaje parece ser fundamental para la cognición espacial, para el reconocimiento de colores, para la comprensión de la falsa creencia, para el almacenamiento y análisis de la información, entre otros. Lo anterior hace plausible la idea de que el lenguaje puede desenvolverse como una tecnología cognitiva, como un medio para el cumplimiento de propósitos cognitivos.

2.3 Lenguaje como tecnología cognitiva para la posesión del concepto de número

En la anterior sección se señaló que el lenguaje puede desempeñar el papel de tecnología cognitiva, pero retomando la pregunta principal de este capítulo sobre si el lenguaje efectivamente puede influir en la posesión del concepto de número, se mostrará cómo el lenguaje es una tecnología cognitiva para la posesión del concepto de número.

Para esta sección, se mostrarán algunos ejemplos de la evidencia que se tiene que permite pensar el lenguaje como tecnología cognitiva en la posesión de conceptos numéricos, adicionales a los que se habían presentado al inicio de este capítulo que podrían servir para el mismo objetivo. Posteriormente, en el capítulo 3, se presentarán distintas formas posibles de comprender la evidencia presentada en esta sección aclarando el tipo de papel que puede jugar el lenguaje como tecnología cognitiva.

La idea de que el lenguaje sea tecnología cognitiva para la posesión del concepto de número implica, entre otras cosas, que el lenguaje sirve como medio que potencia, impulsa, fortifica, optimiza o favorece en algún sentido la posesión del concepto de número. A continuación, se presentarán entonces algunos ejemplos de cómo ciertos aspectos o tipos de lenguaje como las palabras, las formas de notación y el lenguaje escrito pueden tener un impacto cognitivo en ciertas habilidades numéricas.

El uso de las palabras permite reunir, organizar, almacenar y recuperar información (Dascal, 2004) y la información numérica no es una excepción. Las palabras para contar, por ejemplo, pueden ayudar a procesar, comparar y manipular de una manera más automática los números de dos dígitos; lo que permite que los recursos de memoria de trabajo puedan disponerse para la resolución de otros problemas aritméticos posiblemente más complejos (Dowker, Bala, & Lloyd, 2008).

Whitehead en 1948 recalca un papel similar del lenguaje, en este caso de la notación que permite el lenguaje. Whitehead menciona que una buena notación permite liberar al cerebro de trabajo innecesario y aumenta el poder mental (Whitehead, 1948). Por otro lado, ya al inicio de la sección anterior en una cita de Schoenfeld se planteaba el lenguaje escrito, en particular la notación matemática y los símbolos de número como una tecnología para el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1987, p. 71). Adicionalmente, Schoenfeld escribe que este poder de notación ha permitido extender nuestras habilidades de cálculo numérico a niveles que probablemente antes eran impensables. Este autor da como ejemplo la división entre cantidades muy grandes, que para un griego hubiese sido un proceso muy arduo (Schoenfeld, 1987). Por otro lado, Gelman y Butterworth reconocen esta posibilidad de simbolización por medio del lenguaje como indudablemente importante en las habilidades aritméticas, ya que permiten pensar sobre los números y comunicar información sobre ellos (Rochel Gelman & Butterworth, 2005).

La notación sin duda puede facilitar o dificultar significativamente tanto un cálculo aritmético, como la comprensión y manipulación de los números. Ejemplo de esto se puede encontrar en sistemas de numeración como el romano, comparado con el sistema indo-arábigo. Dentro del sistema romano; a pesar de algunas excepciones donde la notación de ciertos números es más sencilla, como por ejemplo el número 100: C, el número 500: D o el número 1000: M; las cantidades grandes se van haciendo difíciles de tratar, por ejemplo, el número 329: CCCXXIX, el número 888: DCCCLXXXVIII, el número 1879: MDCCCLXXIX, el número 5888: MMMMMDCCCLXXXVIII. En algunos casos, como el último, la notación del número es bastante abrumadora; pensar en hacer un cálculo con ese número podría tal vez compararse con la dificultad que pudiera generar un número de la misma cantidad de cifras en el sistema indo-arábigo; es decir, algo como 10 000 000 000 000 000 que representa más de un billón de veces el número 5888. Sin duda la notación indo-arábiga se presenta como una alternativa más sencilla frente al sistema romano, para la manipulación y las operaciones entre números.

Otro ejemplo sobre la facilidad o dificultad de manipulación de los números que puede generar la notación es la base numérica; muestra de eso es el sistema en base doce que podría llegar a ser más sencillo para cierto tipo de manipulaciones que el sistema usual en base diez. En base doce se hacen más fáciles las multiplicaciones y las divisiones puesto que el 12 tiene más factores propios que el 10; además, el 12 es posible encontrarlo en la división del año en 12 meses, en las horas como 12x5 minutos, en los minutos a su vez como 12x5 segundos, en los signos zodiacales, e incluso en unidades de medida como los pies que equivalen a 12 pulgadas. Lo anterior podría llevar a pensar que la manipulación de los números utilizando una notación en base 12 podría ser más sencilla que la base 10 actual.

Un último ejemplo relacionado con la notación y con las palabras de números, que podría llevar a facilitar la posesión, la comprensión y la manipulación de los números, se puede encontrar al comparar las palabras numéricas del francés con las del español. En español, como se sabe, se tienen palabras completamente diferentes para designar los números del 1 al 100; existe una regularidad en las unidades donde siempre se emplearán las palabras designadas del 1 al 9 (exceptuando en 11, 12, 13, 14 y 15, y por supuesto, los casos donde las unidades son 0) pero las decenas tienen todas palabras diferentes e independientes entre sí: diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa. Esto implica que para aprender los números del 1 al 100, se hace necesario saber los números de las unidades y todos los nueve números de las decenas, para empezar a formar sus combinaciones. Ahora, en el francés, de la misma manera, hay una regularidad en las unidades para todos los números del 1 al 100 (con las mismas excepciones del español); pero, adicionalmente existe una regularidad en las decenas a partir del número 70. Las palabras para designar las decenas son las siguientes: dix (diez), vingt (veinte), trente (treinta), quarante (cuarenta), cinquante (cincuenta), soixante (sesenta), soixante-dix (setenta, que podría entenderse como sesenta-diez), quatre-vingts (ochenta, que podría entenderse como cuatro-veintes) y quatre-vingt-dix (noventa, que podría entenderse como cuatro-veinte-diez). Esta regularidad podría implicar una mayor facilidad para aprender las palabras numéricas del 1 al 100; puesto que, en el caso de las decenas, no se deben aprender nueve palabras completamente diferentes y nuevas, sino 6 palabras nuevas y otras 3 que están relacionadas con algunas de esas seis, lo que podría servir para memorizarlas de una manera más sencilla. Por otro lado, el hecho de que el número 80 (por dar un ejemplo) se entienda ya como cuatro-veintes establece una base importante para la posterior comprensión de la multiplicación; por lo menos, implica una familiarización con algunos factores de ciertos números.

Por otro lado, el lenguaje escrito que permite reforzar la memoria, hacer construcciones intelectuales de grande envergadura, refinar y organizar el pensamiento (McArthur, 1987), también ha servido constantemente como favorecedor de ciertos procesos cognitivos. Netz analiza en detalle el libro de los Elementos de Euclides (el texto matemático griego estructurado como sistema axiomático más antiguo que se conoce) y a pesar de que no existía en ese momento una notación desarrollada, es posible reconocer ciertas expresiones lingüísticas que se usan repetidamente y de manera estandarizada como favorecedoras del análisis lógico; rol que desempeñan hoy cierto tipo de símbolos tipográficos (Netz, 1999). Olson también respalda esta posición, argumentando que lo impreso, al ser un medio para almacenar y comunicar conocimiento, hace que el lenguaje escrito facilite el análisis lógico de los argumentos (Olson, 1976; Schoenfeld, 1987).

En conclusión, hay diversos aspectos del lenguaje que pueden hacer que sea una tecnología cognitiva para el concepto de número, es decir que, como medio, el lenguaje puede favorecer de algunas maneras la posesión del concepto de número. Falta entonces entender cómo funciona el lenguaje como tecnología cognitiva, esto es, qué papel desempeña exactamente en la posesión del concepto de número.

3. Papel del lenguaje como tecnología cognitiva en la posesión del concepto de número

En el capítulo anterior se mostró que el lenguaje puede desempeñarse como tecnología cognitiva y se presentaron algunos ejemplos de la evidencia que se tiene que permite pensar el lenguaje como tecnología cognitiva en la posesión del concepto de número. El hecho de que el lenguaje sea tecnología cognitiva para la posesión del concepto de número implica que el lenguaje es un medio que favorece en algún sentido la posesión de este concepto.

En este capítulo se plantean tres categorías distintas que clasifican al lenguaje como tecnología cognitiva y se realiza una búsqueda que permita especificar en cuál de estas se encuentra con respecto a la posesión del concepto de número; esto permitirá aclarar el tipo de papel que desempeña el lenguaje en este proceso.

Al finalizar el capítulo dos, pudo verse que el lenguaje efectivamente ejerce algún tipo de influencia en la posesión del concepto de número, favoreciendo la comparación, el procesamiento y la manipulación de los números e influyendo en otro tipo de habilidades aritméticas. De este tipo de evidencia surge una cuestión que da origen a las dos primeras categorías que se plantean en esta sección, ¿el lenguaje solamente permite optimizar ciertas habilidades numéricas, o se hace necesario para estas? Para el primer caso, se dirá que el lenguaje es una tecnología cognitiva facilitadora de la posesión del concepto de número, es decir, que permite realizar de manera más eficiente ciertos procesos numéricos, pero que no es necesario para poseer el concepto de número. Para el segundo caso, se dirá que el lenguaje es una tecnología cognitiva necesaria[18], esto es, sin lenguaje no se podría poseer el concepto de número.

Estas dos categorías son excluyentes. Por ejemplo, en el proceso de creación de historias, el hecho de tener papel y lápiz facilita el proceso al convertirse en un medio de almacenamiento que hace más sencillo seguir el hilo conector de la historia, observar de mejor manera la estructura que lleva, recodar más fácil todos los detalles que se han presentado, entre otros aspectos. Sin embargo, tener papel y lápiz no es indispensable para crear una historia, se puede crear sin estos implementos. Por otro lado, para morir se hace necesario estar vivo, no es que estar vivo facilite la muerte, esto último no tiene mucho sentido, sino que estar vivo es indispensable para poder morir.

Si la tecnología cognitiva del lenguaje es facilitadora para la posesión del concepto de número, eso supondría que, aun cuando el lenguaje facilite el proceso, es posible el caso de que un ser no lingüístico pueda poseer el concepto de número. Por el contrario, si el lenguaje como tecnología cognitiva es necesaria implicaría que no es posible poseer el concepto de número en seres no lingüísticos.

No obstante, para discutir los puntos anteriores se cuenta con cierta evidencia empírica que permite estudiar versiones más débiles de estos. A saber: que hay seres con variaciones o restricciones lingüísticas considerables y que, aun así, han podido desarrollar este concepto, para el caso del lenguaje como tecnología cognitiva facilitadora; o que seres con fuertes restricciones en su lenguaje carecen del concepto de número, en el caso de que el lenguaje resulte necesario. Por lo tanto, se revisará si la evidencia existente permite soportar las versiones más débiles directamente, y en caso de ser así, se podrá pensar que es plausible que la evidencia soporte de una manera indirecta las versiones más fuertes.

[18] Este tipo de tecnología Dascal lo nombra tecnología constitutiva (Dascal, 2004); sin embargo, el autor está tomando lo constitutivo exactamente como necesario, y hay otra serie de factores adicionales que se podrían esperar de algo constitutivo y que en definitiva no lo debe cumplir una condición que sea solamente necesaria. Sobre lo constitutivo y aquellos factores que lo diferencian de lo necesario se volverá más adelante en el texto.

3.1 Posible evidencia del lenguaje como facilitador para la posesión del concepto de número

Se vio en el capítulo anterior que el lenguaje efectivamente favorece ciertos tipos de procesos numéricos; ahora, para poder determinar que es facilitador, hace falta entonces mostrar que no es una tecnología cognitiva necesaria. Se presentarán dos estudios de Brian Butterworth y una agrupación de estudios de distintos autores de donde se podría deducir que el lenguaje no es necesario para la posesión del concepto de número.

El primero es del año 2005 y es titulado: *"The development of arithmetical abilities".* En este artículo el autor presenta varios ejemplos de bebés que, según él, responden a propiedades numéricas de su mundo visual, sin el beneficio del lenguaje. Esto sería ejemplo de un ser no lingüístico, aparentemente con conceptos numéricos.

Por lo general, en los ejemplos dados por el autor, los bebés presentan cambios en los tiempos de atención cuando se les presentan variaciones cuantitativas (más o menos objetos de los que se le presentaron en un primer momento y a los cuales ya estaban habituados). En el proceso de habituación a la cantidad de objetos, se intentaba controlar otras variables para garantizar que los bebés se habituaran específicamente a la cantidad. Para esto, variaron siempre los objetos, pero no la cantidad en la que se presentaban (por ejemplo: naranjas, llaveros, gafas de sol, guantes, etc.). De esto, podría deducirse que los bebés pueden identificar diferencias de cantidades. Sin embargo, distintas referencias muestran que en este tipo de experimentos, los bebés responden a la cantidad continua (extensión espacial) en lugar de la cantidad (Feigenson, Carey, & Spelke, 2002; Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002).

A pesar de estos resultados, Butterworth presenta un estudio que utilizó grupos de puntos en movimiento, donde el área y el contorno dicen estar estrictamente controlados, lo que haría que el resultado no dependa de la cantidad continua y, por lo tanto, mostraría que los niños sí responden frente a la cantidad (Wynn, Bloom y Chiang, 2002). No obstante, por más de que los niños sí puedan diferenciar determinadas cantidades, esto hace parte de esas habilidades cuantitativas primarias mencionadas en el primer capítulo de este trabajo que, aparentemente, compartimos con los animales y no implican necesariamente que estos bebés ya tengan concepto de número; puesto que, para hablar de posesión del concepto de número se busca precisamente, entre otros factores, superar ese tipo de habilidades primarias.

Por otro lado, en el año 2008 Butterworth, Reeve, Reynolds y Lloyd presentaron un artículo que trata de otra manera este problema. El artículo se titula "*Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children*", en este los autores dicen mostrar que los niños que son hablantes monolingües de dos lenguas australianas con un vocabulario numérico muy restringido poseen los mismos conceptos numéricos que un grupo comparable de niños indígenas australianos de habla inglesa (B. Butterworth et al., 2008). Esto sería ejemplo de seres con restricciones lingüísticas considerables y que, aun así, han podido desarrollar el concepto de número.

Aplicaron cuatro tareas diferentes para este estudio. La primera consistía en poner en frente de los niños una cantidad de fichas determinadas, taparlas y posteriormente los niños debían poner la misma cantidad. En la segunda tarea los niños escuchaban una serie de sonidos generados al darle pequeños golpes con los dedos a bloques de madera, y debían colocar tantas fichas como sonidos escuchaban. La tercera tarea era de adición no verbal, en esta se les mostraba una ficha, se escondía bajo una tela y posteriormente se deslizaba otra ficha bajo la tela, los niños debían colocar tantas fichas como las que había debajo de la tela (hubo intentos que comprendían las sumas 2+1, 3+1, 4+1, 1+2, 1+3, 1+4, 3+3, 4+2 y 5+3). Por último, hubo una tarea en la que debían repartir una cantidad determinada de discos de plastilina de igual tamaño, entre tres osos (repartieron 6, 9, 7 y 10 discos).

Como resultados del estudio, los autores determinaron que no se observaron efectos del lenguaje. Ni los niños de habla warlpiri, ni los que hablaban anindilyakwa se desempeñaron peor que los niños de habla inglesa en cualquier tarea. Además, mencionan que, si un vocabulario numérico fuera necesario para el desarrollo de conceptos numéricos exactos, entonces ningún niño de las comunidades indígenas con lenguas restringidas debería haber alcanzado altos niveles de competencia numérica; sin embargo, ambos grupos alcanzaron niveles altos en todas las tareas. Por último, concluyen que el desarrollo de los conceptos de conteo no depende de la posesión de un vocabulario de palabras numéricas (B. Butterworth et al., 2008).

Sin embargo, hay varios factores importantes que deben ser revisados antes de aceptar las conclusiones del estudio. Los participantes del estudio fueron 45 niños entre los cuatro y los siete años. Cuando los autores presentan los resultados, suelen agruparlos por rangos de edad, el de los niños de 4 a 5 años y el del rango de 6 a 7 años, aparentemente debido a la diferencia de desempeño notable entre ambos rangos; en el rango de edad más alto, el desempeño en las distintas tareas suele estar encima del 70%, mientras que este porcentaje no es superado en ningún momento por el rango de edad de 4 a 5 años. Esto es importante debido a la siguiente información[19]:

1. En el documento de soporte del estudio se afirma que, en Australia, la escolarización es obligatoria, la educación formal debe comenzar a los 5 años y esta es dada en inglés. Este es un punto crucial, ya que a pesar de que los autores mencionan que en las regiones donde se encuentran las dos comunidades con lenguas restringidas, pocos niños asisten regularmente a la escuela, no se especifica en ningún momento si los participantes del estudio asisten a esta y menos si lo hacen regularmente. En caso de que asistan, sería inapropiado intentar deducir conclusiones del lenguaje, cuando en las tres comunidades la educación formal es impartida en inglés. Hay que tener en cuenta, además, que podría haber niños escolarizados en los dos rangos de edad planteados en el estudio.
2. En el grupo de participantes de habla inglesa, no se muestran resultados de los niños del rango de 6 a 7 años, posiblemente porque en este grupo no había niños de esa edad. Este hecho invalida completamente los resultados de este rango para los otros grupos, al no tener un grupo de control con quien hacer la comparación. Adicionalmente, no se presenta información del estado del desempeño numérico verbal de los niños de habla inglesa (de los otros dos grupos tampoco, pero por la particularidad de sus lenguas, se sabe que en caso de poseer palabras numéricas estas serían muy restringidas en cantidad), aspecto importante por controlar para poder comparar realmente los efectos del lenguaje. Esto debido a que, si los niños de habla inglesa conocen muy pocas palabras de número (hipótesis factible por su rango de edad), es evidente que están en una situación bastante similar a los pequeños de los otros grupos. De donde se esperaría que sus resultados fueran similares. Si por el contrario ya manejan y comprenden una buena cantidad de palabras numéricas, sí podría pensarse que el desempeño es independiente del lenguaje; no obstante, sigue

[19] Esta información es posible verificarla en el artículo o en el archivo de información de soporte del estudio que aparece referenciado en el artículo y que está disponible en la página WEB: www.pnas.org/cgi/content/full/0806045105/DCSupplemental

siendo recalcable que el desempeño no superara en ningún caso el 70%. Sin esta información se hace difícil determinar algo al respecto.

3. En la primera tarea, donde se ponía en frente de los niños una cantidad de fichas determinadas, después se tapaban y posteriormente los niños debían poner la misma cantidad, pudo haber jugado un rol importante la subitización[20] para las cantidades entre uno y tres (o cuatro) objetos. Ahora, el desempeño en los grupos grandes de elementos (que no se aclara desde qué cantidad se consideran grandes, pero en todo caso van hasta nueve elementos) fue bastante bajo, este no superó el 30% de respuestas correctas[21]. Por lo que no se podría deducir que los niños están reconociendo esas cantidades en esta tarea.
4. En la segunda tarea, donde los niños debían recordar el número de veces (entre 1 y 7) que fueron golpeados ciertos bloques de madera y colocar tantas fichas como sonidos hayan escuchado, podría estar interviniendo su capacidad de memoria; donde se reconoce en los resultados que, a mayor cantidad de sonidos, menor es el rendimiento de los niños. Para grupos grandes el rendimiento estuvo por debajo del 40%. Como se mencionó en el punto 2, no se sabe con cuántas palabras para contar (uno, dos, tres…) disponen los niños de habla inglesa, por lo que es difícil determinar hasta qué medida su desempeño dependió o no de esa cantidad de palabras. El bajo desempeño podría explicarse posiblemente, por la poca cantidad de palabras para contar que puedan tener los niños.
5. En la tercera tarea, donde se les mostraba una determinada cantidad de fichas, se escondían bajo una tela y posteriormente se deslizaban otras fichas bajo la tela (con las siguientes combinaciones 2 y 1, 3 y 1, 4 y 1, 1 y 2, 1 y 3, 1 y 4, 3 y 3, 4 y 2 y 5 y 3), y los niños debían colocar tantas fichas como las que había debajo de la tela, el desempeño fue mejor en los grupos warlpiri y anindilyakwa; sin embargo, según el artículo no fue significativa la diferencia. También se señala que fueron resueltos más problemas simples que complejos (aunque no se aclara cuáles son los complejos). Para los grupos grandes de objetos, el desempeño estuvo por debajo del 40% y para los pequeños estuvo entre el 40 y 60% aproximadamente. A pesar de que el porcentaje fue más alto en los grupos

[20] La cual no es muestra de posesión de concepto de número, según el primer capítulo del presente trabajo.

[21] Teniendo en cuenta solo el rango de edad de 4 a 5 años por lo argumentado en el punto 2.

pequeños de elementos, todavía no es un porcentaje concluyente que permita decir que los niños son capaces de realizar estas sumas no verbalmente. Se hace posible en esta tarea, una combinación de habilidades de memoria y subitización para sustentar un desempeño alto en los grupos con pocos elementos. Es decir, los niños pudieron haber subitizado sobre dos agrupaciones[22] de elementos diferentes (el primero correspondiendo con las fichas iniciales que se mostraban y el segundo con las fichas que se deslizaban debajo de la tela que cubría las primeras) y haber recordado el resultado de cada uno, al final los niños pondrían primero las fichas del primer grupo recordado y después las del segundo. Esto podría justificar un desempeño alto, por lo menos, en las combinaciones 2 y 1, 3 y 1, 1 y 2, 1 y 3. Sin embargo, se vuelve a enfatizar, el desempeño no superó el 60%. Para los grupos grandes, como sucedió en las otras tareas, el desempeño no fue significativo.

6. Por último, en la tarea de repartición de discos plastilina (6, 9, 7 y 10 discos) entre tres osos, la repartición de los 6 y los 9 discos puede explicarse bajo la comprensión de correspondencias 1-a-1, como lo manifiestan los mismo autores en el artículo (B. Butterworth et al., 2008, p. 13180) que es una condición necesaria más no suficiente para la posesión del concepto de número. Además, aparentemente esta habilidad de correspondencia no depende de los recursos verbales (M. C. Frank, Everett, Fedorenko, & Gibson, 2008). Estas parecen ser razones suficientes para explicar el alto desempeño de los tres grupos en esta tarea (por encima del 70%). Por otro lado, es interesante hacer la comparación del desempeño con 7 y 10 discos de plastilina, donde la correspondencia entre tres osos ya no es evidente. Sin embargo, según la información del artículo, los niños de habla inglesa, aparentemente, no realizaron esta tarea con esa cantidad de discos, por lo que de nuevo se hace imposible una comparación y una deducción sobre los efectos del lenguaje.

De acuerdo con los seis puntos anteriores, no se ofrecieron condiciones adecuadas para poder hacer comparaciones de los desempeños en todas las tareas esperadas, puesto que no había representantes de todos rangos de edad analizados en los tres grupos

[22] No es claro si la subitización puede darse sobre varios conjuntos de elementos simultáneamente. Sin embargo, en esta tarea la subitización de los dos conjuntos no es simultánea.

comparados y en algunos casos (como la última tarea) no todos los grupos realizaron todas las actividades. Adicionalmente, hace falta información relevante que puede ser crucial en la interpretación de los resultados, como el nivel de escolarización de los niños; teniendo presente que en Australia es obligatoria a partir de los cinco años y que es impartida en inglés. Por otro lado, las tareas no contienen condiciones que impliquen la posesión del concepto numérico, por lo que no se puede deducir nada sobre "el desarrollo de conceptos numéricos exactos" de los que habla el artículo. Las actividades que los autores proponen parecen estar más relacionadas con lo que Butterworth llamó habilidades numéricas biológicamente basadas y que define como: "desempeño en tareas que pueden reflejar habilidades numéricas básicas, heredadas, en particular, juicios de numerosidad visual (subitización) y comparaciones de magnitud numérica." (Brian Butterworth et al., 1999). Este tipo de habilidades, como ya se mencionó, no son suficientes para hablar de un concepto de número. En conclusión, de este estudio no es posible derivar ninguna afirmación sobre la influencia del lenguaje en la posesión de conceptos numéricos.

Después de revisar este último estudio, parece conveniente hacer una búsqueda de casos donde las restricciones lingüísticas sean más claras para poder garantizar que las posibles habilidades numéricas que se presenten sean realmente independientes del lenguaje. En el proceso de esta búsqueda, se encontraron distintos casos de trastornos lingüísticos, en particular de personas con afasia severa, que poseen sus habilidades aritméticas intactas. La afasia es un trastorno del lenguaje causado por una lesión cerebral que puede dificultar la comprensión, el habla, la lectura y/o la escritura, según la asociación *American Speech-Language-Hearing Association* (American Speech-Language-Hearing Association, s. f.). En los casos revisados, que se detallaran a continuación, los participantes no podían comprender, ni producir lenguaje gramaticalmente correcto (Brannon, 2005; Varley, Klessinger, Romanowski, & Siegal, 2005) y en uno de esos, incluso no podían leer en voz alta, ni escribir siguiendo dictados (Rossor, Warrington, & Cipolotti, 1995).

Se revisaron tres artículos, en el primero de ellos, de Rossor y sus colegas, se evaluaron ciertas habilidades de procesamiento numérico y de cálculo. En el primer tipo de habilidades, hubo cuatro tareas. Una primera de repetición de números de uno y dos dígitos. En la repetición de un solo dígito el desempeño del participante fue de 8 sobre 10, mientras que en la de dos dígitos, el participante no logró realizar la tarea. La segunda tarea era de lectura de números arábigos entre el 1 y el 9, el desempeño fue de 4 sobre 9. La tercera tarea consistía en hacer correspondencias entre los nombres hablados de los números y los numerales arábigos y entre numerales romanos y arábigos, en el primer caso, el desempeño fue de 26 sobre 36 (encima del 70%) y en el segundo, 34 de 36 (superior al 90%). La cuarta y última tarea de este tipo de habilidades consistió en seleccionar el mayor número en cada uno de los pares de un listado de números arábigos de dos y tres cifras, en esta tarea, el participante tuvo desempeño perfecto. Por otro lado, en las habilidades de cálculo, se plantearon tareas de suma, resta y multiplicación de números entre el 0 y el 9. En las sumas el rendimiento fue de 79 sobre 81 (superior al 95%), en las restas fue perfecto y en las multiplicaciones fue de 51 sobre 64 (cercano al 80%).

A pesar de que se puede observar un deterioro en el desempeño del participante comparándolo con el desempeño que se podría esperar de una persona de 46 años sin trastornos lingüísticos (sobre todo en su capacidad de leer, repetir y unir el nombre de un número hablado con un número arábigo), es indudable que tuvo un alto rendimiento en la mayoría de las asignaciones, de donde los autores concluyen que hay una preservación selectiva de habilidades de cálculo a pesar de la disolución total del lenguaje (Rossor et al., 1995). No obstante, se hace importante recalcar que esta preservación de habilidades no fue completa.

Por otra parte, en el estudio de Varley y sus colegas, analizado por Brannon, se evalúan ciertos procedimientos que son computacionalmente equivalentes entre el lenguaje y el número. A saber: la sintaxis, la incrustación de cláusulas y la generatividad y recursividad. Según los autores, los participantes eran incapaces de comprender estos tres aspectos en el lenguaje; sin embargo, pudieron resolver las tareas numéricas relacionadas con estos. Por ejemplo, reconocían el orden en las operaciones resolviendo adecuadamente 52-11 y 11-52 que se relaciona con la sintaxis, podían solucionar expresiones como 90 - (3 + 17) x 3 que se relaciona con la incrustación de cláusulas y podían generar valores numéricos mayores que x pero menores que x+1 que da cuenta de la generatividad y se relaciona con la recursividad (Brannon, 2005, p. 3177; Varley et al., 2005). De lo anterior, los autores concluyen que se puede seguir siendo capaz de manipular números arábigos en operaciones matemáticas complejas en ausencia de la gramática lingüística; como en el caso de Rossor, es posible que los pacientes con alteraciones graves del lenguaje puedan retener capacidades de cálculo (Brannon, 2005, p. 3177).

Los resultados de estos estudios apuntan a la misma conclusión, las restricciones lingüísticas no implican directamente la pérdida de habilidades numéricas. No obstante, hay que tener presente que se está mencionando que los participantes no perdieron sus habilidades numéricas y no que ellos hayan adquirido estas habilidades sin tener el lenguaje; en otras palabras, según el relato de los autores de estos estudios, los participantes antes de las lesiones cerebrales que les produjo la afasia tenían habilidades numéricas que podían ser muestra de la posesión del concepto de número e igual de importante, como la condición lingüística de estas personas fue ocasionada por una lesión, puede suponerse que antes de esta no tenían restricciones lingüísticas. Una posible explicación que permita entender lo que está sucediendo podría ser la siguiente: el lenguaje permite erigir un puente donde los componentes lingüísticos se transforman en componentes para número, al otro lado del puente está el dominio de lo numérico (lo que no va en contra de los estudios donde resaltan que el dominio del lenguaje y de lo numérico son diferentes) y esos componentes ayudan a la construcción el concepto de número. Si el dominio del lenguaje se daña, no tendría por qué afectar el concepto numérico; incluso si el puente se destruye, como consecuencia de lo anterior, eso implicaría que no podría seguirse construyendo más sobre el número en aspectos que dependan del lenguaje, pero no debería necesariamente destruir lo ya construido. Esto implicaría que es plausible que el lenguaje permita formar y comprender algunos de los componentes característicos de número, pero una vez la posesión del concepto de número es un hecho, se vuelve hasta cierto punto, independiente del lenguaje.

Al revisar la discusión de los autores de estos estudios, es posible encontrar posiciones que se encaminan hacia el mismo punto del argumento anterior. Por ejemplo, Brannon afirma que a pesar de que las sintaxis matemática y lingüística son independientes, es posible que la primera se desarrolle o haya evolucionado a partir de la segunda, es posible que el cerebro humano a causa de la evolución del lenguaje haya ido pavimentando el camino para la sintaxis matemática. Además, afirma: “Debido a que los cerebros de los humanos adultos con afasia alguna vez poseyeron un lenguaje natural, sus deficiencias o capacidades conservadas no pueden ser usadas para responder directamente a dicha pregunta” haciendo referencia a la pregunta sobre si la sintaxis matemática se puede derivar de la sintaxis del lenguaje (Brannon, 2005, p. 3178). Por su lado, Varley y sus colegas afirman:

> Las palabras numéricas pueden ser importantes en la adquisición de conceptos numéricos por parte de los niños y sus representaciones digitales, ortográficas, fonológicas y sensoriales. Del mismo modo, la gramática del lenguaje podría proporcionar una plantilla de "arranque" (bootstrapping) para facilitar el uso de otros sistemas jerárquicos y generativos, como las matemáticas. Sin embargo, una vez que estos recursos están en su lugar, las matemáticas pueden mantenerse sin los recursos gramaticales y léxicos de la facultad del lenguaje. (Varley et al., 2005, p. 3523)

Esta cita respalda claramente la posibilidad planteada de que el lenguaje desempeña un papel importante en la posesión del concepto de número y que el fallo del lenguaje no implicaría necesariamente una pérdida de este concepto. Además, se resalta que, al ser ambos, tanto el lenguaje como lo numérico, sistemas jerárquicos y generativos, puede darse el caso de que el lenguaje sirva como un modelo, como una plantilla que ayude a manipular los números. Esta última idea, será revisada con más detalle más adelante.

Estos casos de estudio de personas con afasia y con habilidades aritméticas que podrían servir como prueba directa de que sin el lenguaje es posible poseer el concepto de número; esto es, de que el lenguaje no es necesario para poseer el concepto de número, no terminan siendo suficientes para determinar eso. Como se mencionó, estas personas antes de tener afasia contaban con habilidades lingüísticas normales y, como se deduce de los artículos, también con habilidades numéricas, por lo que estos casos no eliminan la posibilidad de que el lenguaje sea necesario para la posesión el concepto de número.

Después de revisar lo anterior, se hace interesante revisar un tipo de evidencia más fuerte, algún tipo de situación que permita garantizar que la restricción lingüística está desde el nacimiento y que, aun así, se evidencie la posesión de concepto de número. Para esto, se revisará un caso sobre una persona de la que se decía era incapaz de cualquier tipo de comunicación y que a pesar de esto tenía habilidades numéricas desarrolladas. El caso se presentó en un estudio de Hermelin y O'Connor del año 1990 titulado: "*Factors and primes: a specific numerical ability*" donde se buscaba comparar el desempeño de dos personas, un joven autista y un hombre psicólogo y matemático que sirvió como control, en tareas de factorización de números e identificación y generación de números primos. En el estudio afirman que la cantidad de errores y las estrategias utilizadas fueron similares para los dos participantes; sin embargo, hubo una diferencia notable en la velocidad de resolución de operaciones aritméticas, donde sobresalió la rapidez del joven autista (Hermelin & O'Connor, 1990).

Es de notar que, según es reportado, al joven autista le fue diagnosticado este trastorno a los tres años, nunca imitó gestos como señalar o mover la mano para despedirse, nunca habló y parecía no responder al lenguaje, mostraba muy poco interés hacia los adultos y no intentó nunca comunicarse de ninguna manera. Por otro lado, era muy bueno en juegos que involucraran formas, colores y construcciones; a los cuatro años podía resolver rompecabezas de 100 piezas. El artículo menciona, adicionalmente, que aprendió a escribir replicando letras y números, pero que esta es una habilidad en la que no mostró mejora desde que salió de la escuela (asistió desde los seis años a una escuela especial para niños con autismo). Además, aprendió algunas señas del sistema Paget Gorman, pero es afirmado que nunca las usó de manera espontánea (Hermelin & O'Connor, 1990, p. 165).

En cuanto a sus habilidades numéricas, además de saber escribir números, el artículo menciona que era muy bueno con el dinero, el tiempo, los calendarios y adicionalmente, sabía sumar, restar, multiplicar, dividir grandes cantidades y factorizar (Hermelin & O'Connor, 1990, p. 165). Sin embargo, no se especifica cómo era posible verificar que este participante fuese bueno con el dinero, el tiempo y los calendarios sin poseer lenguaje.

Se podría suponer que, si es bueno con el dinero es porque sabe en el momento de comprar un producto cuánto exactamente debe entregar y cuánto debe recibir de cambio; no obstante, sin la capacidad de comprender el lenguaje hablado, debería tener siempre acceso al valor numérico escrito para poder llevar a cabo estas operaciones. Eso a su vez supondría que puede identificar y manipular claramente los símbolos escritos de los números, los numerales. Esto último es posible asumirlo por el hecho de que esta persona sabe sumar, restar, multiplicar y dividir. En cuanto al tiempo, si se afirma que es bueno con este, puede ser porque entiende en su rutina diaria que ciertas actividades se hacen a ciertos momentos del día, habilidad que no parece requerir del lenguaje, o de pronto, porque es capaz de entender las divisiones en horas, minutos, segundos, aunque no es claro cómo podría verificarse esto último sin la ayuda del lenguaje. En cuanto a los calendarios, podría suceder que el joven sea capaz de identificar fechas especiales, que muestre comprender, por ejemplo, que los sábados y domingos son días donde no debía ir a la escuela (en la época que estaba en la escuela), que identifique claramente el tipo de actividades que debe realizar de acuerdo con el día en el que se encuentra. De nuevo, esto podría pensarse como independiente del lenguaje.

No obstante, hace falta más información para poder entender completamente la afirmación de que esta persona era buena con el dinero, el tiempo y los candelarios, hecho que muestra un tipo de habilidad con los números (aunque no necesariamente concepto de número) que sería independiente del lenguaje.

Por otro lado, un punto que resulta crucial en esta situación son las habilidades de cálculo (suma, resta, multiplicación, división, factorización, etc.) que demuestra el joven, que van más allá de los requisitos mínimos de la posesión del concepto de número y que demuestran un desarrollo aritmético. El artículo, lamentablemente, no aclara cómo el joven aprendió a realizar estas operaciones aritméticas. Respecto a esto último, quizá sea interesante mencionar lo siguiente:

1. Los padres del joven eran matemáticos (Hermelin & O'Connor, 1990, pp. 165-166) por lo que podrían tener un manejo del tema que les permitiera orientar de una buena manera el aprendizaje del joven.
2. Se sabe que el joven conocía los símbolos de número. Sin embargo, no es suficiente conocer símbolos para saber manipularlos bajo reglas aritméticas y para hacer inferencias sobre estos. Esta persona debió en algún momento darle algún sentido a aquellos símbolos, que le permitiera por lo menos comprender sus propiedades básicas. Es completamente viable que el joven haya seguido el mismo proceso planteado en el capítulo 1, el cual recalca el aprendizaje de número relacionándolo en una primera instancia con cantidades de objetos, donde, en este caso, a cada cantidad se le asociaría un símbolo escrito, su numeral. Después de esto, aunque quedan muchas preguntas abiertas, se hace más factible que haya aprendido reglas aritméticas, de donde, si se entienden los números como cantidades, el camino hacia las operaciones básicas se puede establecer de manera natural.

Las habilidades aritméticas que muestra el joven parecen ser razones suficientes para afirmar que posee el concepto de número; no obstante, parece apresurado afirmar que esta persona tenga una comprensión nula del lenguaje. En primera instancia, ya en el artículo es posible reconocer ciertas habilidades lingüísticas básicas, como la capacidad de escribir replicando palabras, de utilizar numerales como símbolos del lenguaje que representan números y de utilizar una cantidad limitada de señas del sistema Paget Gorman. Estas son habilidades muy básicas, pero permiten mostrar que la comprensión del lenguaje, en este caso, no es nula como se afirma.

Por otro lado, el trastorno autista se presenta con una deficiencia o anormalidad en la interacción social, lo que puede manifestarse en la afectación del contacto visual, de la expresión facial, de los gestos y en la poca muestra de interés en los demás (American Psychiatric Association, 1995, p. 70), lo que podría interpretarse (aunque no implique necesariamente) como una muestra de no comprensión del lenguaje, como sucedió en este caso. No obstante, a pesar de la ausencia de lenguaje hablado y de estas características particulares en la interacción social que puede presentar una persona autista, estos aspectos no son suficientes para determinar que una persona es incapaz de comprender el lenguaje. A continuación, se presentará un ejemplo que prueba la anterior afirmación.

En la actualidad, hay un caso de una mujer autista de la que se pensó durante años que era incapaz de comunicarse y que no respondía a ninguna instrucción básica tal como en el caso presentado anteriormente. Esta mujer, llamada Carly Fleischmann, fue diagnosticada con autismo severo, apraxia oral (que es una deficiencia donde los músculos de la boca no responden a las instrucciones del cerebro) y retraso severo del desarrollo a sus dos años. Según reporta su padre, Carly parecía ignorar completamente el mundo a su alrededor y tenía problemas de socialización. De niña, estuvo constantemente en terapia, pero sin mostrar avances significativos en sus habilidades lingüísticas. Sus padres mencionaban que no podían saber qué era aquello que Carly comprendía y qué era lo que ella era incapaz de comprender; esto, precisamente por la imposibilidad de comunicación que se presentaba con ella (Fleischmann, 2012).

Bajo este panorama, Carly y el sujeto del estudio anterior parecen estar en una situación muy similar con respecto a su aparente falta de habilidades lingüísticas, sin tener presente que incluso podría pensarse que el sujeto estaría en ventaja al saber utilizar, así fuera limitadamente, lenguaje de señas (aunque no lo usara espontáneamente) y al tener ciertas habilidades de escritura, como copiar letras.

Sin embargo, un día cualquiera, cuando tenía once años, en el 2006, Carly Fleischmann, que al parecer estaba enferma, se dirigió a un computador y escribió en inglés las palabras hurt (herida) y help (ayuda). Según sus terapistas, ellos nunca habían intentado enseñarle esas palabras; por primera vez, Carly se había comunicado de manera independiente, y después de este día, con mucha terapia, ella continuó utilizando este medio para expresar aquellas cosas que quería decir. Con esto, Carly empezó a mostrar que siempre había entendido lo que sucedía a su alrededor, que comprendía lo que le decían, que era capaz de utilizar el lenguaje escrito gramaticalmente correcto y complejo, mostrando una habilidad sorprendente. Mucho de lo que se había creído de ella respecto a su habilidad y comprensión lingüística resultó siendo falso (Fleischmann, 2012). Algunos ejemplos de las cosas que Carly ha escrito son los siguientes:

- "you know how people talk behind people's back? With me, they talk in front of my back" (Fleischmann, 2012) (“¿sabes cómo la gente habla a las espaldas de otros? Conmigo, hablan frente a mi espalda")
- “I think the biggest misconception is that if you meet one person with autism you’ve met them all, when in fact, when you meet one person with autism, you’ve met one person with autism […] We are more than just the label, and if we are going by labels, I have OCD, scoliosis, selective mutism and Oral Motor Apraxia and worst of all, Good Looking Syndrome!” (Rossi, 2017) ("Creo que la idea errónea más grande es que si conoces a una persona con autismo las has conocido a todas, cuando de hecho, cuando conoces a una persona con autismo, has conocido a una persona con autismo […] Somos más que solo la etiqueta, y si vamos por etiquetas, tengo TOC, escoliosis, mutismo selectivo y apraxia motora oral y, lo peor de todo, el síndrome de lucir bien"). Esto Carly lo mencionó en una entrevista con la revista People en el año 2017.

Estas citas permiten reflejar no solo que Carly es capaz de escribir, sino que además es muy buena haciendo uso del lenguaje, mostrando complejidad, reflexión e incluso humor con el uso de sus palabras que son capacidades que van, sin duda, mucho más allá de un uso básico del lenguaje. Con esto, no quiere insinuarse que el sujeto del estudio presentado tenga habilidades lingüísticas tan desarrolladas como las de Carly; pero sí, que tal vez no hubo pruebas suficientes para determinar que no las tuviera, es posible que esta persona no haya encontrado alguna manera de expresarse como Carly lo consiguió. El hecho de que esta persona no hablara y tuviera una apariencia constante de estar aislada de lo que sucedía a su alrededor, no muestra, como acabó de verse, que sea incapaz de comprender y manejar el lenguaje.

El estudio sobre el joven autista con altas habilidades numéricas podría, en un principio, ser prueba de que sin lenguaje efectivamente se podría llegar a poseer el concepto de número; sin embargo, el hecho de que no haya información de cómo adquirió sus habilidades aritméticas y que no se pueda concluir sobre sus habilidades lingüísticas hace que tenga que descartarse como posible evidencia del lenguaje como facilitador, lo que a su vez permite decir que, no es posible eliminar la opción de que las habilidades numéricas que posee el joven sean resultado de sus habilidades lingüísticas.

Ni los casos de habilidades cuantitativas en bebés, ni los estudios de Butterworth, Reeve, Reynolds y Lloyd comparando el desempeño cuantitativo en comunidades indígenas con supuestas diferencias lingüísticas, ni los casos de personas con afasia conservando sus habilidades numéricas, ni el caso del joven autista con altas habilidades numéricas (que son estudios representativos de los distintos tipos de enfoques empíricos que se han presentado para mostrar la independencia de lo numérico sobre el lenguaje) permiten determinar que el lenguaje no es necesario para la posesión del concepto de número. Adicionalmente, la evidencia presentada sobre los trastornos afásicos hace plausible pensar que el lenguaje, como necesario para número, permitiría comprender algunos de los componentes característicos de número, pero una vez la posesión del concepto de número es un hecho, se vuelve, hasta cierto punto[23], independiente del lenguaje.

3.2 El lenguaje como tecnología cognitiva necesaria para la posesión del concepto de número

En la subsección anterior se examinaron posibles evidencias del lenguaje como no necesario para la posesión del concepto de número, encontrando que ninguna de estas resulta siendo suficiente para afirmar lo que se buscaba. Además, se determinó, que una vez sea un hecho la posesión del concepto de número, las habilidades numéricas se vuelven hasta cierto punto independientes de lo lingüístico. En esta subsección, se presentarán ciertos aspectos del lenguaje que se han reconocido por diversos autores

[23] El participante con afasia del estudio de Rossor y sus colegas, mostró deterioro en cierto tipo de tareas numéricas, por lo que no podría afirmarse una independencia completa.

como fundamentales para número y se mostrarán algunas evidencias que parecen demostrar que el lenguaje realmente es necesario para poseer este concepto.

Los siguientes dos aspectos han sido reconocidos por varios autores como fundamentales para la concepción numérica.

- **Necesidad de las palabras numéricas de conteo.** Se argumenta que un vocabulario de contar palabras es necesario para que una persona posea los conceptos de exactamente cuatro, exactamente cinco, y así sucesivamente (Carey, 2004; Le Corre & Carey, 2007). Sin el vocabulario, solo son posibles los valores numéricos primitivos aproximados (Carey, 2004; Feigenson et al., 2004). Estos autores suponen que el ser humano cuenta con unas representaciones innatas de número que permiten entre otras cosas comparar magnitudes, establecer igualdad o diferencia numérica e incluso realizar sumas y restas (Carey, 2004); sin embargo, estas discriminaciones se dan de manera aproximada y además, este tipo de habilidades corresponden con esas habilidades primarias mencionadas en el primer capítulo que no son muestra necesariamente de posesión de concepto de número.

Es de recalcar que estas palabras no se plantean en estos estudios como necesarias para los conceptos de exactamente uno, dos y tres. Habría que cuestionar si para estos, los autores conceden representaciones innatas exactas por la demostrada habilidad de subitización, ¿poder diferenciar uno, dos y tres objetos consistentemente y sin contar, es muestra de posesión de concepto de exactamente uno, exactamente dos y exactamente tres? Pareciera que poder diferenciar entre estas cantidades de objetos solo es muestra de que se es capaz diferenciar entre esas cantidades de objetos, valga la redundancia, y puede ser que esta habilidad no dependa del lenguaje. No obstante, ese tipo de habilidad no parece soportar la idea de que se posea ya el concepto de uno, dos y tres o de exactamente uno, dos y tres. Entre otras razones, porque esa habilidad puede entenderse como una habilidad no numérica, podría ser el resultado de la capacidad de reconocer patrones visuales, por dar un ejemplo; es decir, de comprender cómo se ve un objeto, cómo se ven dos objetos y cómo se ven tres (en esta última hay más posibilidades de arreglos visuales, pero no son demasiadas: una línea o un triángulo de cualquier clase y tamaño). Además, esa habilidad no da cuenta de las relaciones entre estos números, tener esa habilidad, por ejemplo, no implica necesariamente identificar que el orden de esos tres números es, de menor a mayor: 1,2 y 3. Por lo anterior, no habría razón para excluir a estos números de aquellos a los que se puede acceder por medio de las palabras numéricas.

Por otro lado, Butterworth plantea un rol similar del lenguaje cuando dice que: “el papel del lenguaje es, entre otras cosas, refinar la asociación regular de una palabra de conteo con una numerosidad aproximada particular” (B. Butterworth, 2010, p. 539); es decir, el lenguaje va a permitir que la palabra de conteo mejore la asociación con una numerosidad aproximada hasta que seguramente le corresponda la numerosidad exacta. Por las razones discutidas en el capítulo uno, resulta mejor hablar de cantidades de objetos y no de numerosidades (que se entiende como una propiedad formal, una propiedad de un conjunto). No obstante, se sugiere de nuevo que el lenguaje aparece relacionado con la adquisición de conceptos numéricos exactos.

- **Necesidad de una semántica cuantificadora.** Recalcando de nuevo el papel crucial de las palabras de conteo para el surgimiento de lo que Carey llama las representaciones exactas de número, la autora agrega que la posible fuente de desarrollo de estas representaciones puede ser la representación de los números en el lenguaje natural dentro de la semántica cuantificadora, es decir, viendo los números como representaciones de cantidades de objetos. Así, las palabras numéricas con su semántica cuantificadora permiten comprender que contar otorga la cantidad de objetos en una agrupación (punto planteado como fundamental en el capítulo uno). De esta manera, las palabras para contar o la lista de enteros, como las llama la autora, desempeñan un papel especial en el surgimiento de la capacidad aritmética exacta durante el desarrollo infantil (Carey, 2004, p. 65).

En estos trabajos se resalta la necesidad de poseer palabras o símbolos para contar para poder comprender el significado de los números exactos individuales, pensando en su sentido como cantidades. Por otro lado, como se planteó, posiblemente no es necesario tener palabras para contar para poder diferenciar entre uno, dos y tres objetos; pero, sin duda, diferenciar entre estos no es prueba suficiente de poseer el concepto de uno, dos y tres, por lo que no podría descartarse el rol del lenguaje para estos números.

A continuación, se presentarán ciertos estudios que de alguna manera evidencian los puntos anteriores, mostrando la dependencia de lo numérico sobre el lenguaje.

- Dehaene y Cohen manifiestan que algunos circuitos cerebrales que han sido reconocidos como específicos del lenguaje están involucrados también en el almacenamiento de hechos aritméticos exactos. Aclaran también que otro tipo de manipulaciones cuantitativas como la resta o la aproximación, muestran poca o ninguna dependencia del lenguaje (Stanislas Dehaene & Cohen, 1999). Esto corrobora las afirmaciones de los anteriores puntos donde se hace un realce sobre lo exacto como dependiente del lenguaje. Además, esto podría ofrecer una posible explicación de por qué en los casos presentados de personas con afasia, su rendimiento en algunos procesos numéricos estaba deteriorado.

- Contrario a los casos de personas con afasia presentados anteriormente, se ha mostrado que las deficiencias lingüísticas tienen efectos claros en la posesión del concepto de número. Hay bastante evidencia corroborando que los conocimientos aritméticos pueden verse afectados por la baja competencia lingüística (B. Butterworth, 2010; Cowan, Donlan, Newton, & Llyod, 2005; Donlan, Cowan, Newton, & Lloyd, 2007; Fazio, 1996, 1999).

Se ha mostrado además que las deficiencias específicas del lenguaje en la infancia con falencias en el lenguaje expresivo y receptivo, que implican, entre otras cosas, un vocabulario sensiblemente limitado, errores en los tiempos verbales, dificultad para recordar palabras o producir frases de longitud o complejidad propias de la edad evolutiva, dificultad general para expresar ideas, dificultad para comprender palabras, frases o tipos específicos de palabras (American Psychiatric Association, 1995), inhiben la adquisición de la secuencia de palabras para contar y esta a su vez afecta el desarrollo de habilidades de cálculo y las habilidades de comprensión de la notación numérica (Donlan et al., 2007).

Esto no quiere decir que todo el conocimiento matemático sea dependiente del lenguaje, Donlan encuentra que los principios lógicos que subyacen la aritmética simple pueden ser respaldados por un sistema separable al lenguaje, puesto que los participantes de su estudio con trastorno específico del lenguaje no mostraron un déficit claro en la comprensión de estos. En este punto se recalca nuevamente la importancia de las palabras para contar que ofrece el lenguaje en el desarrollo de las habilidades numéricas, en particular, en el desarrollo del mismo concepto de número.

- Gelman y Butterworth en el 2005 comentan los casos de dos grupos indígenas con fuertes restricciones en el lenguaje que tienen ciertas particularidades respecto a los números (carecen de palabras para denotar números en el caso de los Pirahã, comunidad del Brasil, o poseen muy pocos de estos términos, en el caso de los Warlpiri, comunidad australiana presentada previamente en el capítulo).

Los autores manifiestan que el sistema de conteo en inglés casi siempre es dominado instantáneamente por los Warlpiri en las situaciones donde el dinero es importante (Rochel Gelman & Butterworth, 2005, p. 9). Lo que quiere decir, que al adquirir las palabras para expresar números pueden manejar bien el sistema de conteo, y contar, como se vio en el capítulo uno, se propone como fundamental para la posesión del concepto de número. Además, los Warlpiri tienen éxito en otras de las condiciones planteadas para poseer el concepto de número, algunos de estos pudieron constatarse en la subsección: "*Posible evidencia del lenguaje como facilitador para la posesión del concepto de número*". Esto podría ser prueba adicional del papel fundamental que cumplen las palabras para contar en la posesión del concepto de número.

Adicionalmente, como se vio de manera previa en el capítulo, en Australia la educación formal se imparte en inglés y es obligatoria para todos, por lo que en este caso no solamente se tiene que los Warlpiri manejen las palabras numéricas en inglés, sino que seguramente, así sea de una manera básica, manejan el idioma. Hasta el momento no se ha verificado otra influencia del lenguaje diferente al otorgar las palabras numéricas, pero podría ser posible que otras ventajas que ofrezca el idioma inglés sobre el warlpiri estén permitiendo ese dominio instantáneo del sistema del conteo.

Por otro lado, los autores mencionan que, aunque los Pirahã no utilizan números en su vida cotidiana, Everett les comentó que es fácil enseñar a los niños a contar en portugués si las reglas de pronunciación se ajustan a la fonética de su lengua nativa y si la enseñanza se relaciona con su tarea cotidiana de ensartar cuentas. Esto lo mencionó Everett, según los autores, en una comunicación personal (Rochel Gelman &

Butterworth, 2005, p. 9). Sin embargo, en la publicación de Daniel Everett del 2005, él comenta explícitamente que junto con su familia estuvo intentado enseñarles a los Pirahã a contar hasta diez en portugués durante ocho meses y que nadie consiguió hacerlo; algunas veces daban el resultado correcto pero aparentemente lo decían de manera aleatoria (Everett, 2005, pp. 625-626).

Este resultado muestra que poseer palabras o símbolos para referirse a los números no es suficiente. El lenguaje no es suficiente para la posesión del concepto de número, en este caso puede estar fallando alguna de las otras condiciones necesarias. Everett reporta que los Pirahã tienen dificultad para comprender que los símbolos numéricos deben ser precisos (Everett, 2005, p. 626), es decir que les debe corresponder solamente un número (o una cantidad de objetos). Además, según Gordon los Pirahã han mostrado dificultad en la comprensión de correspondencias uno a uno y en el entendimiento de las transformaciones de los grupos de objetos que modifican la cantidad (quitar o agregar elementos) (Gordon, 2004); sin embargo, estos resultados han sido bastante controvertidos, Daniel Everett que ha sido el principal investigador de esta comunidad, enfatiza que los Pirahã no entendían las tareas que Gordon propuso, en una de los videos que filmó Gordon, los Pirahã, según Everett, repiten continuamente que no saben qué quiere él que ellos hagan (Gordon no manejaba su idioma y no quiso un traductor) (Everett, 2005, p. 644).

Por otro lado, es de recalcar que una de las conclusiones a las que llega Everett en su trabajo es que existe una relación importante entre la ausencia de números, de numerales y del proceso de conteo con la ausencia de otras formas de cuantificación en el lenguaje (Everett, 2005, p. 622).

- En el 2008 Frank, Fedorenko y Gibson realizaron un estudio donde pretendían mostrar que las palabras de número efectivamente actúan como una tecnología cognitiva para las competencias numéricas. Entendida en este caso la tecnología cognitiva como un método para almacenar rápida y eficientemente información mediante abstracción.

En este estudio compararon el desempeño de un grupo de personas de habla inglesa de la ciudad de Boston en Estados Unidos con el de un grupo de participantes de la comunidad indígena de Brasil Pirahã. Los participantes de habla inglesa estaban en un rango de edad entre los 18 y 50 años que aparentaba coincidir con la distribución de edad de los Pirahã (no se podía tener certeza debido a que para los Pirahã es imposible reportar su edad).

La idea del estudio era comprobar que el desempeño de los participantes de habla inglesa iba a ser similar a los de los Pirahã, si realizaban las mismas tareas que ellos, pero bajo una interferencia verbal. Esta interferencia consistía en escuchar clips cortos de radio y en repetir las palabras pronunciadas por el locutor lo más rápido posible. Los participantes fueron familiarizados con este ejercicio primero, hasta que pudieran hacerlo de manera fluida y se sintieran cómodos con eso.

Todos los participantes realizaron cinco tareas de emparejamiento: una tarea de correspondencia uno a uno, una tarea de correspondencia desigual, una tarea de correspondencia ortogonal, una tarea de coincidencia oculta, y una tarea llamada nuts-in-a-can. En las primeras cuatro tareas se trabajó con carretes de hilos y con globos desinflados (las tareas incluían de cuatro a doce objetos), el experimentador presentaba los carretes (puestos en una línea de izquierda a derecha del participante espaciados uniformemente, o agrupados de hasta cuatro objetos, o ubicados no de izquierda a derecha, sino de manera perpendicular a esa ubicación, o escondiéndolos después de colocarlos) y pedía al participante colocar la misma cantidad de globos en una línea. En la última tarea, el experimentador colocaba los carretes uno por uno en una lata opaca que no permitiera ver adentro de ella.

En los resultados, pudo notarse que los hablantes de inglés fueron en general mejores en las tareas, pero las diferencias entre los grupos no fueron constantes. Los desempeños de ambos grupos (Pirahã y los de habla inglesa) fueron bastante similares. En las cuatro tareas de correspondencia los participantes fueron relativamente precisos[24] (sobre todo en la correspondencia uno a uno y la desigual, y en menor medida en la correspondencia ortogonal y en la oculta), lo que indica que estas tareas no dependen significativamente de los recursos verbales (un hallazgo confirmado por el éxito que también tuvieron los

[24] Lo que también contradice el resultado de Gordon del 2004 y soporta el reporte de Everett que mantenía que los Pirahã no habían comprendido las tareas que Gordon les proponía.

Pirahã en estas tareas). En la tarea de "nuts in a-can" ambos grupos tuvieron muy bajo desempeño, lo que sugiere que esta tarea era altamente dependiente de los recursos verbales.

Como conclusiones el estudio arroja que, tanto el aprendizaje como el uso de la capacidad de recordar cantidades exactas superiores a tres o cuatro parecen depender de manera crucial de los mecanismos verbales[25]. Sin embargo, cuando el lenguaje no está disponible, es posible reconocer las capacidades básicas originales. Una de las habilidades que no depende del lenguaje es la de hacer correspondencias uno a uno.

En este estudio presentado, como lo reconocen sus autores, queda pendiente por revisar si la carga cognitiva adicional al tener que escuchar y repetir los clips de radio por parte de los participantes angloparlantes jugó un papel preponderante en los resultados (M. C. Frank et al., 2008; M. Frank, Fedorenko, & Gibson, 2008).

Estas evidencias se hacen bastante interesantes para el fin de esta tesis. Por un lado, son corroboración de que el lenguaje es necesario para entender los números como cantidades exactas y no como aproximaciones, como se había planteado en la primera parte de esta sección. Además, al inicio de esta sección se había mencionado que, si el lenguaje como tecnología cognitiva es necesaria, implicaría en su versión débil que seres con fuertes restricciones en su lenguaje carecerían del concepto de número y esto se ve directamente reflejado en los distintos estudios citados en el segundo punto de las evidencias que sustentan que las deficiencias en la competencia lingüística, como los trastornos específicos del lenguaje de recepción y expresión, tienen efectos claros en el dominio de lo numérico; estos inhiben la adquisición de la secuencia de palabras para contar y esta a su vez afecta el desarrollo de habilidades de cálculo y las habilidades de comprensión de la notación numérica. La posesión del concepto de número debería permitir el desarrollo normal de estas habilidades.

Por otro lado, el ejemplo de los Warlpiri también parece bastante significativo, su lenguaje tiene restricciones numéricas, pero cuando usan el inglés, según los autores,

[25] Ya se vio en la subsección anterior que autores como Carey y Le Corre podrían sustentar esta conclusión.

dominan el sistema de conteo en situaciones involucradas con dinero. Este es un caso en el que aparentemente las palabras para contar están permitiendo superar una serie de habilidades numéricas. Además de eso, podría ser posible que otras ventajas que ofrezca el idioma inglés sobre el Warlpiri estén permitiendo ese dominio instantáneo del sistema del conteo.

El último caso de las evidencias es aún más interesante, sin la disponibilidad del lenguaje, el desempeño de un grupo de habla inglesa es tan bajo como el de un grupo que no tiene concepto de número (según todos los reportes que se han hecho sobre ellos), de nuevo, aparecen las palabras para contar como fundamentales en las habilidades numéricas.

Adicionalmente a las confirmaciones de la necesidad del lenguaje para la posesión del concepto de número, es posible otro tipo de derivaciones de la información anterior. Entre esas, que entre los requisitos que se plantearon en el capítulo uno como necesarios para poseer el concepto de número, no todos precisan del lenguaje. No toda habilidad numérica parece ser dependiente del lenguaje. Al parecer, ser capaz de hacer correspondencias uno a uno es completamente independiente del lenguaje y esta es una habilidad que se declaró fundamental. No obstante, no es difícil imaginarse situaciones que demuestren que esta habilidad se posee y donde no sea necesario utilizar el lenguaje, por ejemplo, repartir un trozo de pastel a cada persona en una fiesta, asignar turnos a personas en una fila, entregar evaluaciones a estudiantes en una clase, etc. Además, otra habilidad que se demostró como independiente del lenguaje es la de entender los principios lógicos básicos de la aritmética simple (ejemplo: conmutatividad y asociatividad de la suma); sin embargo, esta es una habilidad que se entiende como posterior a la posesión del concepto de número.

Por otro lado, se cree que no todo tipo de restricción en el lenguaje implicaría ya una deficiencia en el concepto de número que se posea. Según lo visto hasta el momento, del lenguaje es fundamental el acceso a las palabras o signos de conteo; es decir, el hecho de que otorgue ciertos signos que permitan representar los números y, por otro lado, aquellas propiedades que le admiten ser una tecnología, a saber, que sea un medio producto de construcción humana, susceptible de variaciones y modificaciones, que tenga una estructura recursiva y que permita cumplir un propósito, en este caso cognitivo que corresponde a la posesión del concepto de número.

3.3 El lenguaje como tecnología cognitiva constitutiva para la posesión del concepto de número

A lo largo del anterior y del actual capítulo, se ha podido ver cómo el lenguaje al ser tecnología cognitiva favorece ciertos tipos de procesos numéricos y adicionalmente, se ha observado que algunos factores del lenguaje son necesarios para la posesión del concepto de número. En este recorrido ha sido posible visualizar, tangencialmente, que el lenguaje además de ser necesario para la posesión del concepto de número tiene ciertas propiedades en común con la estructura numérica, como en el artículo de Varley y sus colegas donde se planteaba que al ser el lenguaje y lo numérico ambos sistemas jerárquicos y generativos, puede darse el caso de que el lenguaje sirva como una plantilla que ayude a manipular los números (Varley et al., 2005).

El hecho de que el lenguaje sea necesario para poseer el concepto de número y además comparta distintas propiedades con este lleva a cuestionar si el lenguaje podría llegar a ser constitutivo de número, entendiendo lo constitutivo desde un ámbito explicativo; esto es, si las propiedades que tiene el número son de tal manera que no puedan comprenderse sino es a través de las propiedades del lenguaje. Por lo anterior, se plantea una última categoría a revisar en este capítulo y es el lenguaje como constitutivo de número.

Esta nueva categoría difiere de la anterior donde solo se exigía el carácter necesario. Aquello que sea necesario, no debe ser necesariamente constitutivo. Por ejemplo; el oxígeno es necesario para dormir, en cuanto a que no es posible dormir si no hay oxígeno. No obstante, no hay nada en una especificación que se pueda hacer del oxígeno que me permita comprender una especificación del dormir. En otras palabras, se puede comprender el dormir, sin la necesidad de comprender ninguna de las propiedades del oxígeno.

Con este fin, en esta sección se ahondará sobre el carácter constitutivo del lenguaje. Para esto, se hará una revisión de cuáles son aquellas propiedades comunes que se consideran constitutivas para el lenguaje[26] y que son relevantes para el análisis de lo

[26] Como se definió en el capítulo 2, por lenguaje se está entendiendo lenguaje humano.

numérico[27]. Se mostrará que estas propiedades terminan siendo no solo relevantes, sino que también fundamentales para la posesión del concepto de número, de tal manera que, el tipo de relación necesaria que se presenta entre el lenguaje y lo numérico es una tal que el lenguaje termina compartiendo rasgos estructurales con el fenómeno del que es condición, lo que hará que se considere plausible que la relación sea no solo necesaria, sino que además constitutiva.

Uno de los primeros aspectos comunes a mencionar es la recursividad del lenguaje que en el capítulo dos se revisó desde la morfología, la sintaxis, la semántica y la fonología. Se está entendiendo por estructura recursiva: “aquella que contiene un constituyente A (o estructura) dentro de otro constituyente B (o estructura) del mismo tipo” (Mota, 2015). Ahora, el número, en particular, puede ser entendido como compuesto de números. Los números naturales, como se vio en el primer capítulo pueden ser comprendidos (y definidos) de manera recursiva; entendiendo el 2 como 1+1, el 3 como 2+1, el 4 como 3+1 y así sucesivamente. Adicionalmente, aunque se sale del objetivo de este escrito, el resto de las estructuras numéricas se podrían plantear también recursivamente sobre estructuras más simples; es decir, los números enteros se pueden definir a partir de los naturales, los números racionales a partir de los enteros, los números reales a partir de los racionales, entre otros.

Otro de los aspectos por recalcar es la organización secuencial del lenguaje, que la mayoría de las veces es lineal (teniendo presente que hay excepciones sobre todo dentro del lenguaje escrito). De la misma manera que en el párrafo anterior, es fácil reconocer la organización secuencial de los números[28], de hecho, las palabras numéricas, o por lo menos una primera parte de estas, las aprendemos en un orden estricto. Es posible que, manejar y comprender la organización secuencial del lenguaje, pueda facilitar la comprensión de la organización secuencial de los números. Butterworth en el 2010 hace

---

[27] La recursividad, la sistematicidad, la productividad, lo representacional y la organización secuencial, todas en conjunto, son algunas de las propiedades que pueden diferenciar el lenguaje de otro tipo de sistemas de comunicación animal. Además, se analizan estas y no otras porque resultan siendo propiedades relevantes para la estructura numérica.

[28] Es necesario repetir que el trabajo está haciendo referencia explícitamente a los números naturales, no a otros conjuntos numéricos. De manera clara, hay conjuntos numéricos que no pueden ser ordenados, pero como el interés está en la base fundamental de posesión del concepto de número y en la base de los números es donde precisamente se encuentran los números naturales, el interés se delimita solamente a esta estructura.

la siguiente afirmación: “[…] la simbolización respalda la sintaxis, que a su vez respalda el razonamiento acerca de números grandes y pequeños que un individuo nunca ha experimentado y que quizás no puede conocer por experiencia directa.” (B. Butterworth, 2010, p. 539). Acá se están enfatizando, por un lado, la posibilidad de simbolización del lenguaje y por el otro, su estructura enfocada al orden y relación de las palabras o símbolos numéricos en este caso, como factores que permiten sustentar el razonamiento de números de los que el individuo no ha tenido experiencia directa. Entonces, entender la manera en la que están organizados y se construyen los números, les permite a las personas extender lo que saben de los números que conocen a otros adicionales[29] y este proceso está respaldado, según Butterworth, por la simbolización y la sintaxis que son aspectos del lenguaje.

Otro factor importante es la productividad del lenguaje que gracias a sus principios y restricciones establece cómo formar unidades lingüísticas correctas a partir de otras más pequeñas (Mufwene, 2013). El mismo aspecto es posible reconocerlo en los números naturales, gracias a los principios que los gobiernan (por ejemplo, los axiomas de Peano). Es posible producir tantos números naturales como se desee, teniendo presente que dado cualquier número natural n, se puede construir uno nuevo agregándole 1: n+1.

Otro aspecto por recalcar es el hecho de que tanto el lenguaje como los números son sistemas, entendiendo sistema como un grupo de elementos que interactúan entre sí de acuerdo con una serie de reglas. El lenguaje como sistema es un grupo de elementos articulados y relacionados entre sí siguiendo ciertos principios sintácticos y gramaticales. De igual manera, el sistema numérico está compuesto por ciertos elementos básicos que interactúan de acuerdo con unos axiomas establecidos.

Adicionalmente, es importante recalcar que como sistemas ambos ofrecen herramientas de representación. El lenguaje ofrece palabras, señas y símbolos para representar, en particular, los números, y los números a su vez, en un principio por lo menos, son un mecanismo de representación de la cantidad de objetos de una agrupación.

Por otro lado, en el año 2008 Ann Dowker y sus colegas crearon un listado de características lingüísticas que podrían ser relevantes en el desarrollo aritmético. Dentro

[29] Esta capacidad fue uno de los requisitos que se planteó para la posesión del concepto de número en el capítulo 1 de este trabajo.

de su listado, el aspecto que parece más relevante es la “regularidad” de la base del sistema numérico utilizado en cada lengua (Dowker et al., 2008, pp. 524-527). La regularidad está bastante relacionada con la sistematicidad, con qué tanto los elementos de un conjunto se ciñen a las reglas o principios de un sistema. Se acepta el término propuesto de regularidad para hacer énfasis en la determinación del nivel de sistematicidad de distintos sistemas, valga la redundancia. En este caso el nivel de regularidad del lenguaje (de los símbolos escritos utilizados para denotar número) podría ayudar o dificultar la comprensión de la regularidad presente en los números.

Como ejemplo de un sistema escrito no regular, Dowker menciona a los números romanos que aunque tienen símbolos diferentes para las unidades, decenas, centenas y miles, también hay símbolos especiales para algunos múltiplos de cinco (ejemplo: 5, 50, 500) y además, varía la forma de construcción de los números entre unos y otros (por ejemplo el seis VI es la unión del símbolo del cinco V con la del símbolo del I, aquí seis puede verse como la suma del primer símbolo más el segundo, pero el nueve por dar otro ejemplo IX ya no es la suma de uno (I) más diez (X), sino que en este caso el símbolo indica que al diez (X) se le resta uno (I). Por supuesto podría encontrarse una regularidad en esta forma de construcción, pero sería aún más regular si todos los números se construyesen de la misma manera). Por otro lado, el sistema de numeración escrito arábigo, que está en base 10 es bastante regular, el valor posicional se representa de manera consistente. Los autores mencionan que el cálculo en números romanos parece ser más complejo que en los arábigos y que el uso de los números romanos, según varios historiadores contribuyó al bajo nivel de habilidades aritméticas en la Edad Media y además, que las habilidades aritméticas mejoraron cuando los números arábigos entraron en mayor uso (Frege & J.L. Austin (trans.), 1884).

La regularidad en el sistema oral de numeración parecer ser también importante. Idiomas como el chino, el japonés y el coreano tienen sistemas regulares de conteo oral, donde por ejemplo la palabra para 12 es equivalente a “diez y dos” y la palabra para 23 es equivalente a “dos- decenas- tres” según los autores. En los sistemas regulares, sin duda se podrían aprender más fácil los números grandes ya que podrían inferirse en lugar de recordarlos de memoria y esto facilitaría que los niños pequeños cuenten números más altos en una etapa más temprana, lo que podría darles una ventaja en la manipulación de números (Dowker et al., 2008, p. 526). Además, ya ha sido sugerido que la regularidad de los sistemas numéricos asiáticos es un factor importante en su rendimiento aritmético superior (Miller, Smith, Zhu, & Zhang, 1995; Miura, Kim, Chang, & Okamoto, 1988). Dowker y sus colegas mencionan que estos estudios no son concluyentes, ese rendimiento superior podría basarse en otros aspectos culturales y educativos (Dowker et al., 2008, p. 527); no obstante, sugieren que sí puede haber una influencia, aunque sea bastante específica, de los sistemas numéricos en el rendimiento aritmético (puede facilitar la lectura y comparación de números de dos dígitos) (Dowker et al., 2008, p. 530).

Como ha sido posible detallar, lenguaje y número comparten una serie de rasgos característicos importantes que podrían hacer pensar que el tener acceso a uno de estos podría ser útil para la comprensión de los mismos rasgos en el otro. Dentro del interés de este trabajo, se hace interesante cuestionar si aquellas propiedades que proporciona el lenguaje son constitutivas para número.

En una respuesta afirmativa, se tendría que no es posible comprender las propiedades fundamentales de número si no es por medio de las propiedades fundamentales del lenguaje. En una respuesta negativa, se deduciría que entender las propiedades del lenguaje es completamente independiente a comprender las de número, se podría tener acceso a ambas por medio de caminos diferentes.

Por el recorrido que se ha planteado hasta el momento, donde se ha podido ver que el lenguaje es necesario para número, que comparte varias propiedades con este y además que favorece distintas habilidades aritméticas, no es difícil imaginar que estas propiedades del lenguaje terminen siendo constitutivas de las de número. Eso implicaría, entre otras cosas, que una persona sin lenguaje, o más claramente, una persona incapaz de comprender y/o manejar cada una de las propiedades que se han mencionado del lenguaje, no podrá comprender las propiedades fundamentales de número.

Hay múltiples factores que hacen pensar que el lenguaje podría llegar a ser constitutivo de lo numérico, el hecho de que ambas sean estructuras recursivas, sistemáticas, productivas y organizadas, hace viable que una de estas sea una puerta de acceso a la comprensión de la otra. Adicionalmente, el hecho de que el lenguaje sea una tecnología cognitiva necesaria para la posesión del concepto de número muestra ya cuál de los dos puede ser la puerta de acceso a la comprensión del otro dominio. En este punto, se refuerza y complementa la idea presentada en la primera parte del capítulo que plantea que en el lenguaje se empieza a erigir un puente donde las componentes lingüísticas, que corresponderían con aquellas propiedades relevantes que se han revisado, resultan constitutivas para comprender lo fundamental del número, permiten ir construyendo al otro lado del puente las bases del concepto de número. No obstante, a pesar de que se sabe que la estructura numérica cuenta con estas propiedades, no se ha mostrado que estas sean fundamentales para poseer el concepto de número, podría suceder que estas propiedades se vayan comprendiendo después de una familiarización mayor con el concepto, como parte de un proceso posterior a su posesión. Esto implicaría que estas propiedades no son fundamentales para poseer el concepto de número y, por lo tanto, que el papel del lenguaje no sería constitutivo en la posesión del concepto de número.

Dentro del planteamiento de las condiciones propuestas en el capítulo 1, se comentaba que tener algún tipo de manejo de una serie de números naturales, como lo permite el conteo, no es suficiente para afirmar que una persona posea el concepto de número. Así, se establecieron dentro de las condiciones, unas cuantas que permitían dar cuenta de aspectos que se plantearon como fundamentales de los números naturales, dentro de esas están las siguientes:

- Comprender que los números cumplen reglas, que no se dan de manera aleatoria.
- Comprender que los números son interminables, que dado cualquier número siempre es posible encontrar uno más grande.
- Saber que hay un número inicial.
- Comprender que los números tienen un orden determinado.
    - Dado cualquier número poder determinar cuál es el número siguiente
- Extender las propiedades que se derivan del conocimiento y manejo de los primeros números obtenidos por el conteo a cantidades numéricas más grandes.

Para que estas condiciones se puedan dar lo primero que se hace necesario es comprender que los números son sistemáticos; es decir, que son una serie de elementos que interactúan entre sí siguiendo unas reglas determinadas, esto permitiría comprender que deben cumplir con cada una de las condiciones propuestas. Si esto no se tuviera, posiblemente no se podría entender que los números se dan en determinado orden, que hay una manera de conseguir el número siguiente a uno dado, que existe un número inicial y a partir de él se puede llegar a los demás, y en general no podría establecerse, ni comprenderse ninguna propiedad común a todos los números.

Adicionalmente, comprender el hecho de que los números son interminables (que dado cualquier número siempre es posible encontrar uno más grande) depende también de que se pueda comprender que los números son productivos, que se pueden construir tantos números como se desee[30]; esto, teniendo presente que para saber cómo construir números nuevos, se hace necesario conocer la estructura recursiva del lenguaje, entender que dado cualquier número, se puede obtener uno nuevo (y en particular el número siguiente) agregándole 1 al número dado. Luego entender que los números son interminables, saber cómo llegar a un número nuevo y al siguiente número a partir de uno dado, son factores que dependen de la productividad y de la recursividad de los números.

Por otro lado, se puede reconocer directamente la necesidad de la propiedad de la organización secuencial cuando se establece que se debe comprender que los números tienen un orden determinado. Ya se vio que, para saber determinar después de un número cualquiera, cuál número sigue, que es un factor directamente relacionado con el orden secuencial de los números, también se hace necesario comprender la estructura recursiva de los números.

Por último, en la sección: *El lenguaje como tecnología cognitiva constitutiva para la posesión del concepto de número* se vio que del lenguaje es fundamental el acceso a las palabras o signos de conteo; es decir, el hecho de que otorgue ciertos signos que permitan representar los números que a su vez están representando cantidades de objetos. Se vio que esto era requerido para entender los números como cantidades exactas y no como aproximaciones, que es un aspecto necesario para el posterior desarrollo aritmético. Entender los números como representaciones de cantidades es un aspecto que se encontró como fundamental desde el capítulo 1, donde se vio que la mayoría de los autores revisados planteaban el proceso de conteo como condición necesaria para la posesión del concepto de número. De lo anterior, es posible derivar

[30] Es posible pensar en una comprensión de los números naturales como infinitos, sin requerir productividad (pensando en los naturales como un conjunto con infinitos elementos). No obstante, por la evidencia de los estudios revisados en el capítulo 1, parece que primero se llega a una noción de infinito en potencia, como la que se plantea acá, antes de poder consolidar una concepción de infinito en acto.

que el aspecto representacional es uno de los factores fundamentales de lo numérico y que se hace necesario para la posesión del concepto de número.

Lo numérico termina siendo una construcción que dentro de sus rasgos fundamentales necesita de unas propiedades que se tienen y resultan siendo fundamentales para el lenguaje: productividad, sistematicidad, recursividad, lo representacional y lo organizacional. El tipo de relación necesaria que se presenta acá entre el lenguaje y lo numérico es una tal que el lenguaje termina compartiendo rasgos estructurales con el fenómeno del que es condición, esto hace bastante implausible construir esa relación como una necesaria y no constitutiva. Esto plantea una hipótesis susceptible de ser comprobada: El lenguaje como constitutivo de lo numérico.

Una posible opción que podría presentarse como respuesta negativa a la tesis que aquí se plantea, es que exista un tercer dominio, diferente a lo numérico y a lo lingüístico que sea constitutivo de estos dos y que en ambos permita llegar a estos mismos rasgos fundamentales; podría ser, por ejemplo, que el ser humano, tenga algún tipo de predisposición hacia la recursividad, la productividad, lo representacional, la sistematicidad y lo organizacional. No obstante, esto no permitiría dar razón de algunos casos inusuales como el de Pirahã donde se carece de un lenguaje recursivo. Actualmente, el tipo de información empírica que se encuentra disponible no permite determinar contundentemente que los rasgos del lenguaje terminen siendo constitutivos de los de número. No obstante, hay algunos casos que podrían ser mejor entendidos bajo esta tesis.

Han existido algunas situaciones de personas que han sido confinadas o aisladas desde sus primeros años y a causa de eso no han tenido un desarrollo normal de su lenguaje. Tal es el caso de los llamados niños ferales, que son niños que aparentemente han sobrevivido por épocas largas solos, abandonados en la naturaleza, y muchas veces, se dice, han sido criados por lobos, monos u otro tipo de animales. Ese tipo de casos se hacen interesantes en el panorama de este escrito; no obstante, la falta de certeza sobre la veracidad de estos casos, la falta de documentación científica, o la falta de interés en las habilidades numéricas que se muestra en la poca documentación que hay, hacen que no sea posible verificar en estos la tesis presentada.

No obstante, existe un caso relativamente reciente (comparado con varios de los casos de niños aislados más conocidos que datan del siglo XVIII) de una niña que vivió aislada los primeros 13 años de su vida. Este caso es interesante porque hay bastante documentación sobre ella y aunque nunca hubo un interés directo en evaluar sus habilidades numéricas, si hay información sobre estas. El nombre que le fue otorgado a la niña para proteger su identidad fue Genie. Genie vivía con sus padres y su hermano, pero por algunas razones no completamente confirmadas, su padre la aisló completamente a sus, aproximadamente, 20 meses de edad, dejándola sola en una habitación, donde permanecía amarrada de día a una silla de baño para niños y de noche en un saco para dormir que su padre hizo buscando que ella no se pudiera mover, y ubicada dentro de una cuna cubierta a los lados y arriba por malla de alambre; es decir, prácticamente una jaula.

Además de las circunstancias anteriores, el padre era intolerante al ruido, por lo que no había televisor, ni radio en la casa y por lo que, si su madre y su hijo querían hablar, debían hacerlo en voz muy baja. Por esta misma razón, Genie tenía prohibido hacer cualquier tipo de sonido; cuando para tratar de llamar la atención, Genie emitía algún sonido, su padre la golpeaba. Adicionalmente, su madre y su hermano tenían prohibirlo hablarle, y además su padre tampoco le hablaba, en cambio de esto, actuaba frente a ella como si fuera un perro salvaje, le ladraba, le gruñía, le mostraba los dientes, dejaba sus uñas crecer y la arañaba. Según se relata, el sonido de los gruñidos del padre fue uno de los pocos a los que ella tuvo acceso durante sus primeros trece años de vida. Al inicio, su madre buscaba estar un poco de tiempo con Genie cada día (a escondidas de su esposo), pero por una enfermedad que tenía, fue quedando ciega y cada vez se le dificultó más hacer esto.

Cuando Genie tenía 13 años, en 1970, su madre pudo escapar junto a ella dirigiéndose a la casa de la abuela materna de Genie. Luego de unas semanas, buscando ayuda por su ceguera, la mamá de Genie entró equivocadamente a un edificio de ayuda familiar, donde no tardaron en advertir el estado de Genie, que estaba acompañando a su madre; inmediatamente llamaron a la policía y Genie fue internada en un hospital por su desnutrición extrema (Curtiss, 1977, pp. 3-7).

En el hospital empezó su observación. Genie no reaccionaba a la temperatura, no podía comer alimentos sólidos, no podía pararse derecha, no hacía ningún tipo de vocalización, excepto un tipo de quejido; sin embargo, aún al llorar lo hacía completamente en silencio. La niña tenía incontinencia urinaria y fecal, salivaba abundantemente y escupía a todo lo que tenía cerca. A pesar de su carencia de socialización, Genie era curiosa, mantenía buen contacto visual con las personas, tenía mucho interés por todo lo que había a su alrededor y especialmente por el contacto y la atención humana.

En cuanto al lenguaje, los estudios mencionan que Genie comprendía muy pocas palabras (como, “sonajero”, "conejito", "rojo", "azul", "verde", "marrón” y “mamá”), era capaz de extraer la información de negación o de advertencia en órdenes negativas y se afirma que posiblemente la información de pregunta en preguntas de sí/no respuesta. Adicional a esto, no se tenía más evidencia de algún otro tipo de conocimiento del inglés; se sabía que Genie no podía procesar una frase considerando solo su contenido lingüístico, su comprensión dependía en gran medida de los gestos y otro tipo de pistas no lingüísticas (Curtiss, 1977, p. 11).

Sin embargo, después de un tiempo, Genie empezó a poseer nuevo vocabulario y a pronunciar ciertas palabras. Todo indicaba, incluyendo evidencia de su desarrollo cognitivo, ciertos indicadores lingüísticos y las habilidades receptivas que tenía la niña, que Genie estaba lista para adquirir su lengua natal (Curtiss, 1977, p. 12). No obstante, estaba la duda constante si a los 13 años que tenía Genie, no era ya demasiado tarde para adquirir el lenguaje. Así, empezó un largo periodo intensivo de educación para Genie.

Genie hizo avances impresionantes, no obstante su lenguaje estuvo bastante lejos de ser un lenguaje normal (Curtiss, 1977, p. 204). Genie nunca adquirió completamente la gramática, aplicaba reglas de manera muy variable, presentaba una disparidad mayor que la normal entre la comprensión y la producción lingüística, al igual que entre el rendimiento que mostraba y la competencia que se creía que tenía, además, mostró falla (y Curtiss[31] sugiere que tal vez incapacidad) para adquirir mecanismos y formas sintácticas específicas que están presentes en un desarrollo gramatical normal (Curtiss, 1977, p. 209).

Adicionalmente, se reporta que no era usual que Genie hablara, y cuando lo hacía, no solía ser de manera espontánea, lo hacía cuando se le preguntaba o se le solicitaba algo. Además, cuando hablaba, era común que empezara a repetir la misma frase una y otra

[31] Susan Curtiss es una de las investigadoras que compartió varios años con Genie y cuya tesis doctoral fue sobre este caso.

vez. Otro de los aspectos que muestran la anormalidad del lenguaje de Genie era la aparición de una serie de frases que parecen carecer de una estructura interna, o que demostraba la ausencia de comprensión de las preguntas Wh en inglés. Genie decía cosas como: “very angry clear water” (“agua clara muy enojada”), “Father hurt like Grandma” (“padre hiere como abuela” / ”padre hiere gusta abuela”), “Where is may I have ten penny?” (¿Dónde es/está puedo tener 10 centavos?), “Where is doctor help Gennie” (¿Dónde es/está doctor ayuda Gennie?) (Curtiss, 1977, p. 164).

Las múltiples falencias en el lenguaje de Genie son recalcables sobre todo en su aspecto sintáctico y en lo sistemático. Respecto al ámbito numérico, hay una serie de comentarios sobre las habilidades cuantitativas de Genie que serán presentadas a continuación.

En el primer año de Genie en el hospital, ella mostró una habilidad extraordinaria para tener una percepción que reportan como Gestalt de las cantidades, es decir, una capacidad para poder percibir una serie de objetos como un todo global y poder determinar cuántos objetos hay, sin necesidad de contar (de hecho, Genie no sabía contar en ese momento). Curtiss dice que era como si Genie tuviese una imagen visual en algunos casos, táctil en otros, de cómo se percibía uno, dos, tres, cuatro… hasta siete objetos. (Curtiss, 1977, p. 222). Esta investigadora presenta una anécdota interesante que está relacionada con esta habilidad: Genie estaba un día en un salón de clases junto a otras personas, la profesora le preguntó a un niño que tenía dos globos, cuántos globos tenía él, él niño respondió: tres. Ante esto, Genie lo miró sorprendida y se acercó al niño entregándole otro globo (Curtiss, 1977, p. 15). Esto es muestra de que Genie realmente sabía cómo debían verse dos o tres objetos, lo que podría ser una habilidad importante para su posterior desarrollo numérico.

No obstante, durante dos años Genie estuvo aprendiendo a contar, sin lograr un éxito total. Uno de sus problemas fuertes se presentaba en el orden secuencial de los números. Contar sin duda era un trabajo muy laborioso y lento para Genie, que hacía solo bajo indicación, y que requería de estímulos y de ciertas pautas para hacerlo. Curtiss afirma que Genie era claramente deficiente en esta área, a pesar de no haber evaluado específicamente esa habilidad (Curtiss, 1977, p. 225). Como dato anecdótico, cuando Genie estaba aprendiendo a contar, al parecer reemplazó con esta habilidad, que estaba en proceso de desarrollo, su habilidad Gestalt con las cantidades de objetos

(Curtiss, 1977, p. 224). Esto muestra algo bastante recalcable, una aparente comprensión de que el conteo cumplía con el mismo objetivo de esa habilidad previa que poseía. No obstante, al parecer perdió en alguna medida esa habilidad extraordinaria que tenía con las cantidades y no se puede afirmar tampoco que haya aprendido a contar, debido a las deficiencias que presentaba.

Por lo tanto, Genie presentó serias dificultades comprendiendo el orden de los números, que, como se comentaba anteriormente en el capítulo, es uno de los factores que deben comprenderse dentro de la sistematicidad y lo organizacional de lo numérico. Este caso es un ejemplo preciso de que poseer ciertas habilidades cuantitativas como la que ella poseía, no es suficiente para tener concepción numérica. Adicionalmente, esto presenta una situación que podría comprenderse en caso de que la tesis propuesta en este capítulo resultara cierta, la deficiencia en la comprensión de la organización secuencial de los números posiblemente podría explicarse desde su deficiencia sintáctica con el orden y relación de las palabras en el lenguaje. No obstante, habría que revisar, y en particular en la peculiaridad del caso de Genie, que no haya otros factores que pudieran estar incidiendo tanto en las falencias lingüísticas, como en las numéricas.

Otro caso que podría ser estudiado bajo la perspectiva de esta tesis, es el caso de la comunidad indígena del Brasil, Pirahã. El lenguaje como constitutivo de número permitiría comprender por qué los Pirahã, a pesar de que manejan correspondencias 1-a-1 y han aprendido palabras para designar números, no tienen concepto de número. Los Pirahã carecen de una estructura recursiva en su lenguaje (Everett, 2005) y este hecho podría estar incidiendo directamente en su incapacidad para comprender la estructura recursiva numérica.

Resumiendo, en este capítulo fue posible visualizar que, a pesar de que es posible tener habilidades numéricas avanzadas (que van más allá de una concepción fundamental de número) teniendo fuertes e importantes restricciones lingüísticas (como en los casos de las personas con afasia); no fue posible demostrar lo mismo, en casos donde no se hubiese contado nunca con el lenguaje. En particular, estos resultados permitieron recalcar que, independientemente del papel que pueda desempeñar el lenguaje en la formación y comprensión de lo fundamental de lo numérico, una vez la posesión del concepto de número es un hecho, esta posesión se vuelve hasta cierto punto, independiente del lenguaje.

Por otro lado, sobre el papel del lenguaje en ese momento de formación y comprensión de los aspectos fundamentales del concepto de número, en una primera instancia, se mostró que el lenguaje era necesario, detallando que del lenguaje es fundamental el acceso a las palabras o signos de conteo, que permiten comprender los números como cantidades exactas y no como aproximaciones, que resulta un aspecto necesario para el posterior desarrollo aritmético.

Además, del lenguaje también se considera fundamental, como recurso explicativo que permite comprender por qué el lenguaje puede estar desempeñando un papel en lo numérico, aquellas propiedades que le admiten ser una tecnología, a saber: que sea un medio producto de construcción humana, susceptible de variaciones y modificaciones, que tenga una estructura recursiva y que permita cumplir un propósito, en este caso cognitivo que corresponde a la posesión del concepto de número. El hecho de entender el lenguaje en términos tecnológicos, además de permitir comprender que puede desempeñar un propósito en lo numérico, permite plantear una hipótesis. Como se mencionó, la tecnología es susceptible de variaciones y modificaciones; pero, yendo más allá de eso, una tecnología como producto de construcción humana puede ser rediseñada, permitiendo una mejor adecuación a determinados medios o permitiendo responder de mejor manera a nuevas necesidades. Por lo que pensar en el lenguaje como tecnología, debería permitir pensarla como susceptible a rediseño y si esto fuese de esta manera, ocasionaría que se pueda orientar de tal manera la transformación del lenguaje que se vuelva óptimo para el acceso y el desarrollo de las habilidades numéricas. Este es un punto que debe ser tratado y estudiado con más detenimiento.

Por otro lado, fue posible ver que poseer el concepto de número implica una serie de habilidades perceptivas o prácticas, que no terminan siendo suficientes. Lo numérico termina siendo una construcción que dentro de sus rasgos constitutivos necesita de unas propiedades que se tienen y resultan siendo fundamentales para el lenguaje, y esto, resulta haciendo plausible que el lenguaje se entienda como una tecnología cognitiva constitutiva de la posesión de concepto de número.

Esta tesis plantea una discusión sobre varios puntos importantes, el primero de ellos es que algunas de las formas actuales de evaluar posesión de concepto de número parecen resultar insuficientes. Generalmente, este tipo de estudios empíricos se concentra en la evaluación de la capacidad de hacer correspondencias 1-a-1 o del tipo de habilidades que se nombraron en la tesis como cuantitativas primarias; por ejemplo, la capacidad de reconocer aproximadamente entre dos grupos de objetos aquel que tenga más. Este tipo de tareas parecen dar cuenta, hasta cierto punto, de una noción muy básica de cantidad; no obstante, este tipo de noción no es todavía suficiente para garantizar que ya se tiene un concepto de número que pudiera servir de base para un desarrollo aritmético habitual.

Es posible encontrar otro tipo de estudios, donde el objetivo ya no es evaluar la posesión del concepto de número, sino que, suponiendo esta, se busca analizar el desempeño en el razonamiento numérico y aritmético. En este tipo de estudios lo usual es encontrar tareas que permitan evaluar distintos tipos de operaciones básicas aritméticas; pero, en algunas ocasiones, se encuentra una preocupación por otra serie de factores que resultan, para esta tesis, fundamentales para evaluar la posesión de número. Dentro de estos está la capacidad de determinar el orden de una serie de números y de determinar cuál es el número siguiente o el anterior de cualquier número dado. Como se mencionó, se considera que este tipo de habilidades debería ser considerado en los estudios que tienen como objetivo evaluar la posesión del concepto de número; como se ha manifestado en distintas oportunidades, presentar ciertas manipulaciones de números, no es suficiente para afirmar que se posea lo fundamental del concepto de número, hace falta mostrar habilidad de razonamiento numérico.

Adicionalmente, llama la atención una aparente falta de interés en evaluar la comprensión de que los números son interminables, este es un factor que no suele encontrarse en los estudios sobre desempeño aritmético y razonamiento numérico, y mucho menos en los estudios sobre posesión del concepto de número. Al ser este uno de los rasgos fundamentales de los números naturales, surge la necesidad de plantear una evaluación de este factor en la posesión del concepto de número.

Por otro lado, otro factor que se considera relevante mencionar sobre los actuales estudios que tienen como objetivo plantear condiciones de posesión del concepto de número, en particular, sobre aquellos revisados en el primer capítulo, es que actualmente parece haber una tendencia en emplear términos formales matemáticos para la descripción de ciertas habilidades perceptuales; siendo los más recurrentes en este ámbito de lo numérico: conjunto y cardinalidad. Esto presupone un problema en cuanto a que en la discusión que se propone en los estudios no se hace una distinción clara de cuándo se está haciendo referencia a los conceptos formales y cuándo se hace referencia a propiedades o términos perceptuales, y como se vio en el primer capítulo, estos dos aspectos son completamente diferentes; no cumplen necesariamente las mismas propiedades, ni conllevan al mismo tipo de implicaciones. Razón por la cual, este uso despreocupado e innecesario de estos términos resulta problemático para la comprensión de los enfoques que se proponen.

Este aspecto es importante y a la vez sencillo de solucionar, bastaría con emplear otra serie de términos que correspondan explícitamente al ámbito del que se quiera hacer referencia; es usual encontrar el término *numerosidad* para referirse a la cantidad de objetos (que sería la contraparte perceptual del concepto formal de cardinalidad) y podría hablarse de agrupaciones o colecciones de objetos, en lugar de hablar de conjuntos. Otra forma, quizás menos clara que la anterior, sería explicar en estos estudios que los términos conjunto y cardinalidad van a ser entendidos de tal manera que, hagan referencia exclusivamente a términos y propiedades perceptuales.

Por otra parte, otro de los puntos que se considera importante resaltar es que el hecho de pensar el lenguaje como tecnología constitutiva de la posesión del concepto de número podría explicar, entre otros asuntos, por qué las habilidades cuantitativas primitivas de las que se habló en el primer capítulo, no son suficientes para hablar de posesión del concepto de número; saber elegir entre dos grupos de objetos aquel que contenga una mayor cantidad o tener la habilidad de elegir de forma recurrente un grupo donde haya tres elementos, por dar un par de ejemplos, son habilidades que no requieren una especificación utilizando los recursos que otorga el lenguaje, podrían seguramente entenderse con nociones de magnitud espacial o de reconocimiento de patrones visuales que no permiten llegar todavía a lo numérico. Las relaciones entre este tipo de magnitudes o de patrones no dan cuenta de las relaciones fundamentales entre los números y, por lo tanto, la estructura a la que permite llegar este tipo de habilidades termina siendo mucho más simple y no numérica.

Lo anterior permitiría explicar también por qué las especies animales (como chimpancés, ratas, perros, palomas), a las que se les ha otorgado tener habilidades cuantitativas como las mencionadas, no pueden ir mucho más allá de estas. La ausencia de lenguaje estaría impidiendo que lleguen a comprender las propiedades fundamentales mencionadas que les permitiría acceder a lo numérico.

Adicionalmente, el hecho de que el lenguaje resulte en particular constitutivo permite comprender una dificultad que se presentó en el primer capítulo, en el momento de querer plantear condiciones de posesión de concepto de número que no presupusieran en ninguna medida el papel del lenguaje. Previamente, se hicieron varios intentos de plantear una serie de condiciones que resultaran lo más completas posible de acuerdo con lo que se ha planteado en los estudios actuales sobre el tema; no obstante, el lenguaje siempre aparecía de manera evidente. Por lo que se llegó a la conclusión de que, si se quería tener una manera de comprender la posesión del concepto de número que no presupusiera el lenguaje y que fuera útil para el resto de la tesis, no podría exigirse que esta fuera una especificación completa. Se recalca ahora que, la necesidad de las palabras o signos para contar que es un aspecto que se presuponía necesario en los estudios y que no era evidente, por ciertas evidencias que buscaban corroborar lo contrario, se ratificó en el transcurso de esta tesis.

No obstante, se resalta también que no es común encontrar interés en otro aspecto del lenguaje que pueda terminar siendo fundamental para la posesión del concepto de número y eso ocasiona que actualmente se carezca de evidencia empírica que pueda llegar a corroborar o rectificar la tesis que se propone acá. De esta manera, se considera importante el planteamiento de estudios que permitan evaluar si las propiedades de recursividad, productividad, organización, sistematicidad y representación que tiene el lenguaje resultan siendo constitutivas de estas mismas propiedades en los números.

Esta discusión sobre la relación entre el lenguaje y la posesión del concepto de número pareciera heredarse del debate existente acerca del lenguaje y la cognición; por un lado, podría plantearse un relato de la prioridad de la cognición sobre el lenguaje, donde se considera que primero el ser humano tiene la capacidad de desarrollar procesos numéricos y luego con el fin de hacerlos socialmente disponibles, implementa un sistema representacional que permite exteriorizar dichos procesos pero que no es necesario, ni constitutivo de lo numérico. Por otro lado, podría pensarse que el lenguaje va a ser prioritario respecto a la cognición, el ser humano podría necesitar de palabras numéricas y de ciertos rasgos fundamentales que posee el lenguaje para poder acceder, comprender y lograr una sistematización de lo numérico.

Esta tesis, como se ha visto, se inclina por el segundo de estos dos relatos; el ser humano y otras especies animales cuentan con una serie de habilidades cuantitativas primarias que se plantean como independientes y previas al lenguaje; no obstante, estas habilidades por sí mismas no permiten llegar al concepto de número y, además, sin desconocer que pueden ser de ayuda, no fue posible mostrar que estas sean necesarias para la posesión del concepto de número. El lenguaje, se plantea entonces, como el factor principal que permite superar esas habilidades, y permite entrar a y comprender el ámbito numérico. Esta tesis que, como ya se mencionó, es susceptible de ser corroborada, plantea una perspectiva de análisis diferente en ese debate entre lenguaje y cognición; de ninguna manera se insinúa que sea concluyente sobre el debate, pero sí aporta una manera distinta de abordar y discutir este tema.

Para finalizar, esta tesis adquiere importancia también en el ámbito educativo. El campo de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se reconoce como uno de los temas más importantes y problemáticos en la educación escolar. En el sistema de educación formal y en un proceso de aprendizaje habitual, una de las puertas principales de ingreso al conocimiento matemático son los números, por lo que la posesión del concepto de número termina siendo fundamental para el posterior desarrollo de habilidades aritméticas y matemáticas en general.

Siendo conscientes del tipo y la gravedad de las dificultades que presentan los estudiantes en particular con el conocimiento matemático y lo importante que es este no solo para el desarrollo de habilidades de razonamiento lógico y numérico, sino como forma de conexión continua con el mundo, se hace preciso hacer una revisión de las posibles causas fundamentales de la dificultad en la matemática, tema que ha sido origen de discusión y debate durante muchos años. Para este camino, se considera necesario hacer la revisión desde lo fundamental del conocimiento matemático; es decir, desde los primeros acercamientos que tienen los estudiantes con este dominio, que como se mencionó antes, suelen ser los números. Una dificultad en la comprensión de los números podría fácilmente repercutir en dificultades más graves en la aritmética que se presenta como rama fundamental de las matemáticas (Courant & Robbins, 1996; De Cruz et al., 2010).

Por lo anterior, plantear el lenguaje como un aspecto constitutivo de número propone una perspectiva diferente de revisión de las posibles falencias en el aprendizaje numérico. Puede ser que esta perspectiva, otorgue otro tipo de explicación, de herramientas y de claves que permitan comprender qué está fallando en la concepción de lo numérico.

Además, si el lenguaje efectivamente pudiera ser rediseñado como se sugirió antes, no sería solamente útil en la comprensión de las dificultades numéricas, sino que posiblemente podría orientarse, de tal manera que, resultara siendo un factor importante en la solución de estas dificultades.

Bibliografía

American Psychiatric Association. (1995). *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-IV* (Pierre Pichot, Juan J. López-Ibor Aliño, Manuel Valdés Miyar). Barcelona: Masson.

American Speech-Language-Hearing Association. (s. f.). Aphasia. Recuperado 12 de junio de 2018, de https://www.asha.org/public/speech/disorders/Aphasia/

Antell, S., & Keating, D. (1983). Perception of Numerical Invariance in Neonates. Child Development, *54*(3), 695-701.

Ardila, A., & Rosselli, M. (2002). Acalculia and Dyscalculia. *Neuropsychology Review*, *12*(4), 179-231.

Arthur, W. B. (2009). *The nature of technology: what it is and how it evolves*. London: Free Press. Recuperado de http://www.myilibrary.com?id=894342

Astington, J. W., & Jenkins, J. M. (1999). A Longitudinal Study of the Relation Between Language and Theory-of-Mind Development. *Developmental Psychology*, *35*(5), 1311-1320.

Bloomfield, A. (1933). *Language* (New York: Henry Holt and Co.).

Brannon, E. M. (2005). The independence of language and mathematical reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *102*(9), 3177-3178. https://doi.org/10.1073/pnas.0500328102

Brown, R. W., & Lenneberg, E. H. (1954). A study in language and cognition. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, *49*(3), 454-462. https://doi.org/10.1037/h0057814

Buijsman, S. (2017). Learning the Natural Numbers as a Child. *Noûs*. https://doi.org/10.1111/nous.12219

Butterworth, B. (2004). Everybody counts but not everybody understands numbers. *British Psychological Society lecture*.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *46:1*, 3-18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2005.00374.x

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends Cogn Sci*, *14*, 534-541. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.007

Butterworth, B., Reeve, R., Reynolds, F., & Lloyd, D. (2008). Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *105*(35), 13179-13184. https://doi.org/10.1073/pnas.0806045105

Butterworth, Brian, Graná, A., Piazza, M., Girelli, L., Price, C., & Skuse, D. (1999). Language and the Origins of Number Skills: Karyotypic Differences in Turner's Syndrome. University of Trieste, Italy.

Butterworth, Brian, & Reeve, R. (2008). Verbal Counting and Spatial Strategies in Numerical Tasks: Evidence from Indigenous Australia. *Philosophical Psychology*, *21*(4), 443-457. https://doi.org/10.1080/09515080802284597

Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática* (Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, Vol. 1).

Carey, S. (2004). Bootstrapping & the origin of concepts. *Daedalus*, *133*(1), 59-68. https://doi.org/10.1162/001152604772746701

Carruthers, P. (2002). The cognitive functions of language. *Behavioral and Brain Sciences*, *25*(06). https://doi.org/10.1017/S0140525X02000122

Corballis, M. C. (2010). Did language evolve before speech? En R. K. Larson, V. Deprez, & H. Yamakido (Eds.), *The Evolution of Human Language* (pp. 115-123). Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511817755.008

Corballis, M. C. (2011). The Recursive Mind: The Origins of Human Language, Thought, and Civilization. Princeton University Press.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods* (Second Edition. New York: Oxford University Press.).

Cowan, R., Donlan, C., Newton, E. J., & Llyod, D. (2005). Number Skills and Knowledge in Children With Specific Language Impairment. *Journal of Educational Psychology*, *97*(4), 732-744. https://doi.org/10.1037/0022-0663.97.4.732

Curtiss, S. (1977). *Genie: A Psycholinguistic Study of a Modern-Day «Wild Child»* (Vol. 55). London: Academic Press, Inc. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/413340?origin=crossref

Dascal, M. (2004). Language as a cognitive technology. *In B. Gorayska & J.L. Mey (Eds), Cognition and Technology*, 37-62.

De Cruz, H., Neth, H., & Schlimm, D. (2010). The cognitive basis of arithmetic. *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice. College Publications*, *11*, 59-106.

Dehaene, S. (1997). The number sense. How the mind creates mathematics. *Oxford University Press, Inc.*

Dehaene, Stanislas, & Cohen, L. (1999). Language and Elementary Arithmetic: Dissociations between Operations. University of Trieste, Italy.

Delazer, M., & Girelli, L. (1999). Language and Numerical Skills: An Introduction to Past and Present Issues (pp. 483-494). University of Trieste, Italy.

DfES. (2001). *The National Numeracy Strategy. Guidance to Support Learners with Dyslexia and Dyscalculia*. London. Recuperado de http://scotens.org/sen/resources/dyslexia_leaflet_maths.pdf

Donlan, C., Cowan, R., Newton, E. J., & Lloyd, D. (2007). The role of language in mathematical development: Evidence from children with specific language impairments. *Cognition*, *103*, 23-33.

Dowker, A., Bala, S., & Lloyd, D. (2008). Linguistic Influences on Mathematical Development: How Important Is the Transparency of the Counting System? *Philosophical Psychology*, *21*(4), 523-538. https://doi.org/10.1080/09515080802285511

Everett, D. L. (2005). Cultural Constraints on Grammar and Cognition in Pirahã: Another Look at the Design Features of Human Language. *Current Anthropology*, *46*(4), 621-646. https://doi.org/10.1086/431525

Fazio, B. B. (1996). Mathematical Abilities of Children With Specific Language ImpairmentA 2-Year Follow-Up. *Journal of Speech and Hearing Research*, *39*, 839-849.

Fazio, B. B. (1999). Arithmetic Calculation, Short-Term Memory, and Language Performance in Children With Specific Language Impairment: A 5-Year Follow-Up. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*, *42*, 420-431.

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002). Infants' Discrimination of Number vs. Continuous Extent. *Cognitive Psychology*, *44*(1), 33-66. https://doi.org/10.1006/cogp.2001.0760

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(7), 307-314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002

Fleischmann, A. (2012). *Carly's Voice: Breaking Through Autism* (Simon & Schuster).

Frank, M. C., Everett, D. L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology: Evidence from Pirahã language and cognition, 819-824.

Frank, M., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Language as a cognitive Technology English-Speakers Match Like Pirahã When You Don't Let Them Count.

Frege, G., & J.L. Austin (trans.). (1884). *The Foundations of Arithmetic. A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number* (Second revised edition. Harper Torchbooks, New York, 1960.).

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*, 43-74.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, Rochel, & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? *Trends in Cognitive Sciences*, *9*(1), 6-10. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.11.004

Gorayska, B., Marsh, J. P., & Mey, J. L. (2001). Cognitive Technology: Tool or Instrument? Presentado en Meurig Beynon, Christopher L. Nehaniv and Kerstin Dautenhahn, eds, Cognitive Technology: Instruments of Mind, Proceedings of the 4th International Conference, Berlin: Springer-Verlag.

Gordon, P. (2004). Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia. *Science*, *306*(5695), 496-499. https://doi.org/10.1126/science.1094492

Hartnett, P. M. (1991). *The development of mathematical insight: From one, two, three to infinity*. Philadelphia: University of Pennsylvania.

Hermelin, B., & O'Connor, N. (1990). Factors and primes: a specific numerical ability. *Psychological Medicine*, *20*(01), 163-169. https://doi.org/10.1017/S0033291700013349

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to set theory* (Marcel Dekker, Inc. Third Edition). Universidad de Wisconsin, Milwaukee.

Koster, J. (2009). Ceaseless, Unpredictable Creativity: Language as Technology. *Biolinguistics*, *3*, 61-92.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. how the embodied mind brings mathematics into being*. United States of America: Basic books.

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*, 395-438. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005

Lyons, J. (1995). *Linguistic semantics: An introduction* (Cambridge University Press).

Majid, A., Bowerman, M., Kita, S., Haun, D. B. M., & Levinson, S. C. (2004). Can language restructure cognition? The case for space. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(3), 108-114. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.01.003

McArthur, D. (1987). Le langage considéré comme une technologie. En *Cahiers de Lexicologie* (pp. 157-164).

Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal behavior Precesses*, *9*, 320-334.

Miller, K. F., Smith, C. M., Zhu, J., & Zhang, H. (1995). Preschool Origins of Cross-National Differences in Mathematical Competence: The Role of Number-Naming Systems. *Psychological Science*, *6*(1), 56-60. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1995.tb00305.x

Miura, I. T., Kim, C. C., Chang, C.-M., & Okamoto, Y. (1988). Effects of Language Characteristics on Children's Cognitive Representation of Number: Cross-National Comparisons. *Child Development*, *59*(6), 1445. https://doi.org/10.2307/1130659

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). Quantitative development in infancy and early childhood. *New York: Oxford University Press.*

Mota, S. (2015). Sobre el concepto de recursión y sus usos. *Praxis Filosófica Nueva serie*, *40*, 153-181.

Mufwene, S. S. (2013). Language as technology: Some questions that evolutionary linguistics should address. En T. Lohndal (Ed.), *Linguistik Aktuell/Linguistics Today* (Vol. 202, pp. 327-358). Amsterdam: John Benjamins Publishing Company. https://doi.org/10.1075/la.202.22muf

Netz, R. (1999). Linguistic formulae as cognitive tools. *Pragmatics & Cognition*, *7*, 147–176.

Olson, D. R. (1976). *Culture, technology and intellect* (In L. B. Resnick (Ed.). The nature of intelligence. Hillsdale). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Palla, M., Potari, D., & Panagiotis, S. (2011). Secondary School Students' Understanding of Mathematical Induction: Structural Characteristics and the Process of Proof Construction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1023–1045.

Peano, G. (1889). Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. *Libreria Bocca*, 1-20.

Pica, P. (2004). Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group. *Science*, *306*(5695), 499-503. https://doi.org/10.1126/science.1102085

Potter, M. C., & Levy, E. I. (1968). Spatial enumeration without counting, *39*, 265-272.

Rips, L. J., Bloomfield, A., & Asmuth, J. (2008). From numerical concepts to concepts of number. *Behav Brain Sci*, *31*, 623-642; discussion 642-87. https://doi.org/10.1017/S0140525X08005566

Rossi, M. (2017). Nonverbal Woman with Autism on Finding Her Voice and Advocating for Others: «We Are More Than Just a Label». Recuperado 12 de julio de 2018, de https://people.com/human-interest/22-year-old-nonverbal-woman-with-autism-on-finding-her-voice-and-advocating-for-others/

Rossor, M. N., Warrington, E. K., & Cipolotti, L. (1995). The isolation of calculation skills. *Journal of Neurology*, *242*(2), 78-81. https://doi.org/10.1007/BF00887820

Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Stephen R (n.d.), A. (2016). Morphology. *Encyclopedia of Cognitive Science, Macmillan Reference, Ltd., Yale University*. Recuperado de https://cowgill.ling.yale.edu/sra/morphology_ecs.htm

Styliandes, G., Styliandes, A., & Philippou, G. (2007). Preservice Teachers' Knowledge of Proof by Mathematical Induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 145–166.

van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Varley, R. A., Klessinger, N. J. C., Romanowski, C. A. J., & Siegal, M. (2005). Agrammatic but numerate. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *102*(9), 3519-3524. https://doi.org/10.1073/pnas.0407470102

Von Bredow, R. (2006). "Brazil's Pirahã Tribe: Living without Numbers or Time. *Spiegel online*. Recuperado de http://www.spiegel.de/international/spiegel/brazil-s-piraha-tribe-living-without-numbers-or-time-a-414291.html

Whitehead, A. N. (1948). *An introduction to mathematics.* (Oxford University Press.). Oxford.